MATHÉMATIQUES - Devoir surveillé nº

Exercice 1 : (14 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\,)$.

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous, à rendre avec la copie.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2.
   a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\ (2;1;1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$ et à $\overrightarrow{IJ}$.

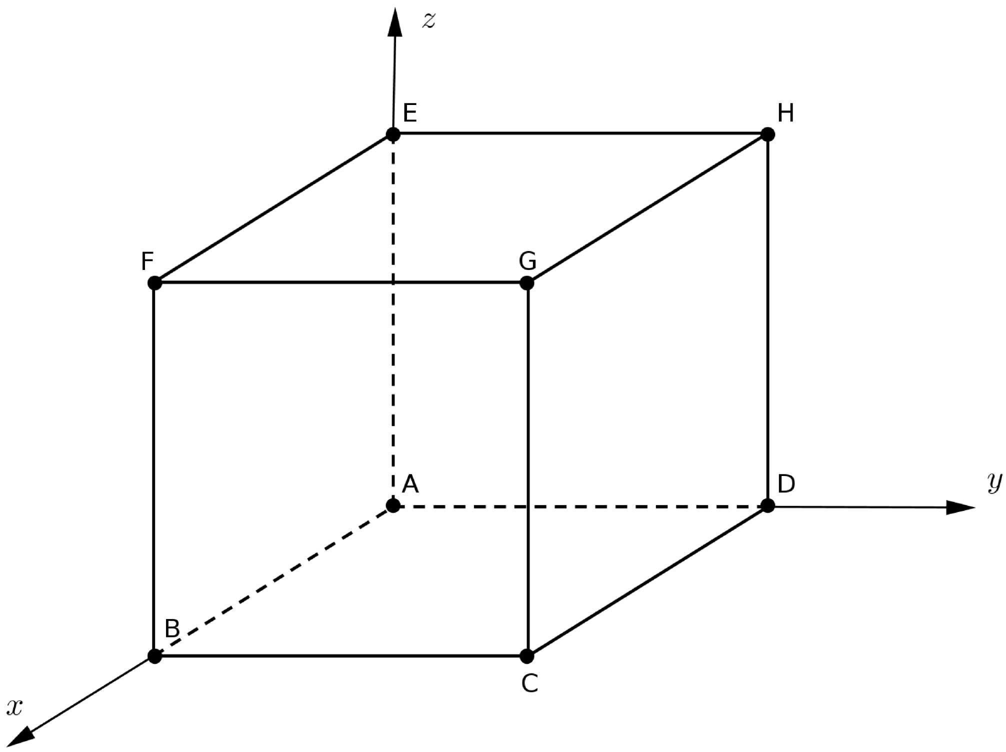
   b) En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.
3.
   a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

   b) En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4};1;0\right)$. Placer le point R sur la figure.
4. Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.
5.
   a) Montrer que que le point T, projeté orthogonal de G sur (IJK) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$.

   b) Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

   c) Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre G passant par F. Justifier que la sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) sont sécants.

   d) Déterminer le rayon du cercle intersection de $\mathscr{S}$ et (IJK).
6. Construire l'intersection des plans (IJK) et (EDG). Justifier la construction.



Exercice 2 : (6 points)

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit t un nombre réel.

On donne le point A(−1 ; 2 ; 3) et la droite $\mathscr{D}$ de système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=9+4t \\ y=6+t \\ z=2+2t \end{cases}$.

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite $\mathscr{D}$.

1.
   a) Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$, perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ et passant par A.
   b) Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$.
   c) En déduire la valeur exacte de d, distance entre A et $\mathscr{D}$.
2. Soit M un point de la droite $\mathscr{D}$.
   a) Exprimer AM^2 en fonction de t.
   b) On pose : $f(t)=AM^2$. En étudiant les variations de f, retrouver la valeur de d.