Géométrie dans l'espace (I) - Calcul vectoriel

1 Définitions et exemples - Rappels

1.1 Règles usuelles

Les règles du calcul vectoriel dans l'espace sont les mêmes que dans le plan. On donne la même définition d'un vecteur par direction, sens et norme. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, deux vecteurs et a, b, deux réels. On a :

$$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

$$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$$

$$\|a\vec{u}\| = |a| \cdot \|\vec{u}\|$$

1.2 Colinéarité

Rappel : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

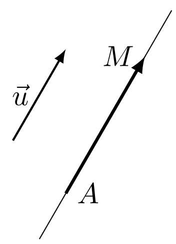
Remarque : supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Dans ce cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

1.3 Définition d'une droite

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace et A un point.

Définition 1

La droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A est l'ensemble des point M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$.



1.4 Vocabulaire : combinaison linéaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, 3 vecteurs de l'espace.

On dit que $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

De même, on dit que le vecteur $\vec{t}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ s'il existe trois réels a, b et c tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, et ainsi de suite avec un nombre quelconque de vecteurs.

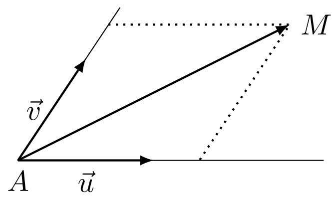
1.5 Définition d'un plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace et A un point.

Définition 2

Le plan $\mathscr{P}$ défini par $(A,\vec{u},\vec{v})$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Autrement dit : ≪ M appartient au plan $\mathscr{P}$ ≫ est équivalent à : ≪ il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ≫.



2 Vecteurs coplanaires

Définition 3

On dit que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si l'un des trois est combinaison linéaire des deux autres.

Par exemple si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, avec $a,b \in \mathbb{R}$.

Remarque : on voit tout de suite que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'ils peuvent être représentés dans un même plan.

Cas particuliers :
- Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{0}$ sont toujours coplanaires.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors quel que soit le vecteur $\vec{w}$, les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Théorème 1

Il y a équivalence entre les deux affirmations suivantes :
- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
- $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

Propriété 1

Soit $\mathscr{P}$ le plan défini par $(A,\vec{u},\vec{v})$, et soient $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$, deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.
Alors $\mathscr{P}$ est aussi défini par $(A,\vec{u}',\vec{v}')$.

L'idée est que pour définir un plan, il faut deux vecteurs de directions différentes.

3 L'espace usuel

3.1 Définition

Définition 4

L'espace usuel est défini par les deux conditions suivantes :
1. Il existe trois vecteurs non coplanaires.
2. Étant donnés trois vecteurs non coplanaires (arbitrairement choisis), tout vecteur de l'espace est combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

Autrement dit, si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, alors pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

On dit que le triplet $(x\,;y\,;z)$ forme les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

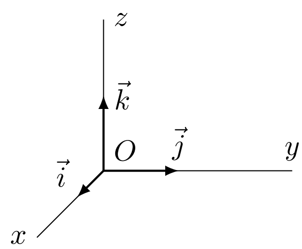
Conséquence : Soit O un point et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Pour tout point M, il existe un triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Le triplet $(x\,;y\,;z)$ forme les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; par définition, il forme aussi les coordonnées du point M dans le **repère** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

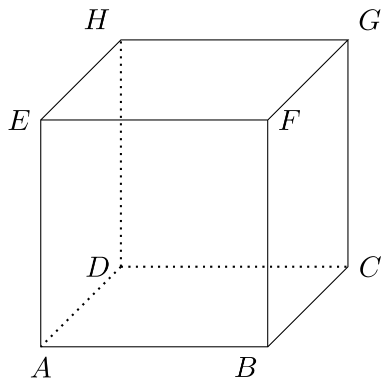
Vocabulaire : On appelle x : l'abscisse, y : l'ordonnée, z : la cote du point M.

On représente traditionnellement ainsi le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:



3.2 Exemple basique : le cube

On considère le cube représenté ci-dessous.



L'espace étant rapporté au repère $(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$, les coordonnées des sommets sont :
$A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;0)$, $E(1;0;1)$, $F(1;1;1)$, $G(0;1;1)$, $H(0;0;1)$.

3.3 Coordonnées et colinéarité

La propriété suivante découle directement de la définition : deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

C'est la même propriété que dans le plan, sauf qu'il y a trois coordonnées.

3.4 Coordonnées et coplanarité

Soient trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$. Comment savoir si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ?

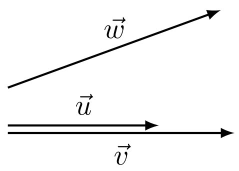
a) On cherche d'abord si deux des vecteurs sont colinéaires. Dans ce cas, les trois vecteurs sont ipso facto coplanaires.

b) Dans le cas contraire, on cherche à exprimer un des vecteurs, par exemple $\vec{w}$, comme combinaison linéaire des deux autres. Autrement dit, on résout le système d'inconnues a et b :

$$\begin{cases} x'' &= ax + bx' \\ y'' &= ay + by' \\ z'' &= az + bz' \end{cases}$$

Si ce système admet un couple $(a;b)$ solution, alors on peut en déduire que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Dans le cas contraire, les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Attention : il faut bien vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires pour pouvoir conclure. En effet, supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Si $\vec{w}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ lui aussi, alors il ne peut pas s'exprimer comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$; pourtant, dans ce cas, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont bien coplanaires (illustration ci-dessous).



Exemple : On donne : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$; $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

a) On voit que les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles : $\begin{array}{c|c}1 & 2\\0 & 1\\2 & 1\end{array}$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{lllll}5 & = a & + & 2b\\2 & = & & b\\4 & = 2a & + & b\end{array}\right. \qquad (1)$$

On commence par résoudre le sous-système constitué par les deux premières lignes :

$$\left\{\begin{array}{llll}5 & = a & + & 2b\\2 & = & & b\end{array}\right.$$

On trouve :

$$\left\{\begin{array}{ll}a = & 1\\b = & 2\end{array}\right.$$

On cherche si la solution obtenue est compatible avec la dernière ligne : $4 = 2 \times 1 + 2$. C'est vrai. Donc $(1;2)$ est bien solution du système (1). On a ainsi : $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$. Les trois vecteurs sont coplanaires.

3.5 Représentation paramétrique d'une droite

Soient un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et un point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$.

La droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$.

On obtient donc en passant aux coordonnées : $\left\{\begin{array}{ll}x = & x_A + ta\\y = & y_A + tb\\z = & z_A + tc\end{array}\right.$

Le système précédent constitue une **représentation paramétrique** de la droite d définie par $(A,\vec{u})$. Réciproquement, un système de cette forme constitue la représentation paramétrique d'une droite.

Remarque : Une droite admet une infinité de représentations paramétriques, puisque qu'il y a une infinité de choix possibles pour A et $\vec{u}$.

Exemple : Le système : $\left\{\begin{array}{ll}x = & 1 + 3t\\y = & -5t\\z = & 1{,}5 + 0{,}2t\end{array}\right.$ est une représentation paramétrique de la droite passant par $A\begin{pmatrix}1\\0\\1{,}5\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\\0{,}2\end{pmatrix}$.

Géométrie dans l'espace (II) - Droites et plans

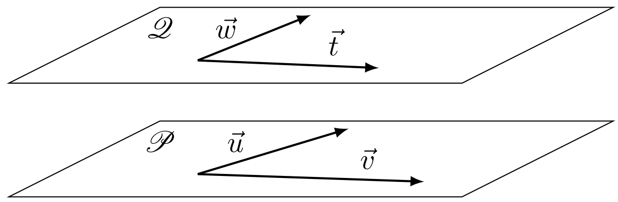
4 Position relative de droites et plans

4.1 Position relative de deux plans

Soient deux plans $\mathscr{P}$ défini par $(A,\vec{u},\vec{v})$ et $\mathscr{Q}$ défini par $(B,\vec{w},\vec{t})$.

Propriété 2

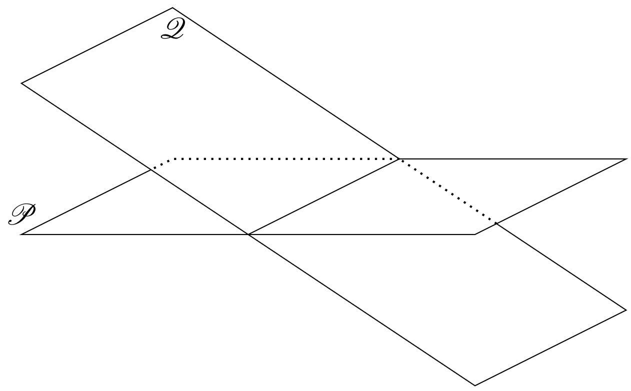
Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles distincts ou confondus. On dit qu'ils ont la même direction.



Conséquence directe : si $\mathscr{P}$ est défini par $(A,\vec{u},\vec{v})$ et $\mathscr{Q}$ est défini par $(B,\vec{u},\vec{v})$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles (au sens large : ils ont la même direction).

Propriété 3

Deux plans de directions différentes sont sécants et leur intersection est une droite.



4.2 Position relative d'un plan et une droite

Soit d une droite définie par $(A,\vec{u})$ et $\mathscr{P}$ un plan.

Définition 5

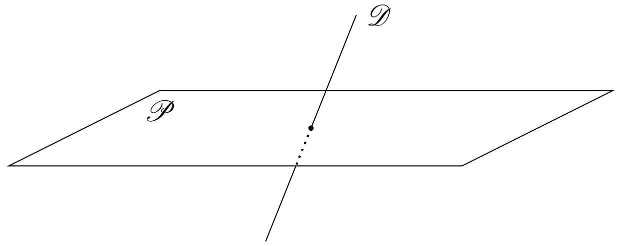
On dit que d est parallèle à $\mathscr{P}$ (au sens large) si $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$. De manière équivalente, on peut dire : d est parallèle à $\mathscr{P}$ si d est parallèle à une droite de $\mathscr{P}$.

On démontre facilement que dans ce cas, on a soit $d \subset \mathscr{P}$, soit $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$.

De même, on a la propriété suivante :

Propriété 4

Si d n'est pas parallèle à $\mathscr{P}$, alors d coupe $\mathscr{P}$ en un point.



4.3 Position relative de deux droites

Soient deux droites : d définie par $(A,\vec{u})$ et d' définie par $(B,\vec{v})$.

On dit que d et d' ont la même direction si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On vérifie facilement que dans ce cas, d et d' sont confondues (cas où $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires) ou parallèles distinctes.

On dit que deux droites sont coplanaires si elles sont incluses dans un même plan (autrement dit, il existe un plan qui les contient toutes les deux.)

Propriété 5

> Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont soit sécantes soit de même direction.

Deux droites qui ne sont ni sécantes, ni parallèles (au sens large) sont donc non coplanaires.

4.4 Exemples

Reprenons le cube de la page 3.

Les droites (AB) et (DC) sont parallèles. Les droites (AB) et (AD) sont sécantes. Les droites (AB) et (EH) ne sont pas coplanaires (elles ne sont donc ni sécantes ni parallèles).

Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles. Les plans (ABC) et (AED) sont sécants.

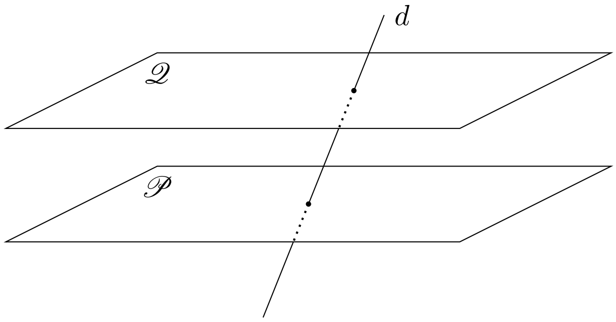
La droite (BC) est parallèle au plan (AED). La droite (AG) est sécante au plan (AED).

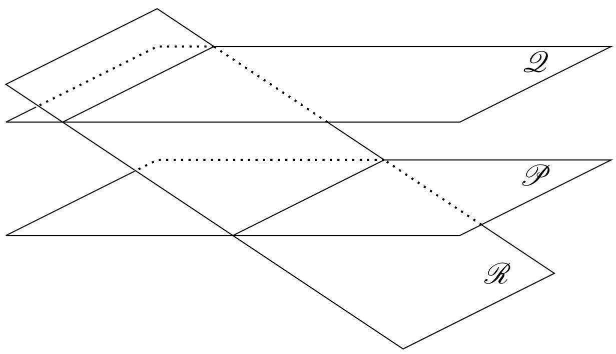
5 Parallélisme de droites et plans

Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$, trois plans ; soient d, d' et d'', trois droites.

Propriété 6

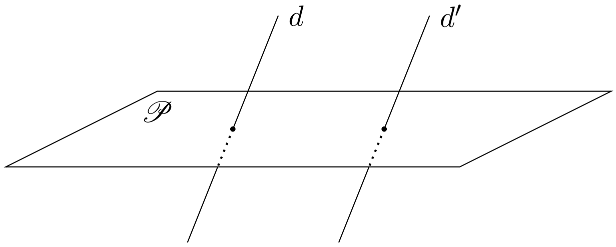
> On suppose que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.
> - Si $\mathscr{R} // \mathscr{P}$, alors $\mathscr{R} // \mathscr{Q}$.
> - Si $\mathscr{R}$ est sécant à $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{R}$ est sécant à $\mathscr{Q}$, et les droites intersections sont parallèles.
> - Si $d // \mathscr{P}$, alors $d // \mathscr{Q}$.
> - Si d est sécante à $\mathscr{P}$, alors d est sécante à $\mathscr{Q}$.





Propriété 7

On suppose que d et d' sont parallèles.
- Si $d''//d$, alors $d''//d'$.
- Si $d//\mathscr{P}$, alors $d'//\mathscr{P}$.
- Si d est sécante à $\mathscr{P}$, alors d' est sécante à $\mathscr{P}$.



Attention : Si d'' est sécante à d, on ne peut pas en conclure que d' et d'' sont sécantes.

Par exemple, dans le cube (page 3), $(AD)//(BC)$ et (AH) est sécante à (AD) mais pas à (BC).

Propriété 8

On suppose que d et $\mathscr{P}$ sont parallèles.
- Si $\mathscr{P}//\mathscr{Q}$, alors $d//\mathscr{Q}$.
- Si $d//d'$, alors $d'//\mathscr{P}$.

Attention :

Lorsque d est parallèle à la fois à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ne sont pas forcément parallèles. S'ils sont sécants, alors leur intersection est une droite parallèle à d (au sens large : parallèle ou confondue). C'est la propriété suivante :

Propriété 9

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans sécants ; soit d une droite parallèle à la fois à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{Q}$. Alors d est parallèle à la droite intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

Démonstration : Considérons le plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ qui contient d. Comme $\mathscr{P}'//\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ est sécant à $\mathscr{Q}$, alors $\mathscr{P}'$ est sécant à $\mathscr{Q}$. Soit d' leur droite d'intersection.
d et d' sont coplanaires, et elles ne peuvent pas être sécantes, car sinon, d et $\mathscr{Q}$ auraient un point d'intersection, ce qui est impossible (car $d//\mathscr{Q}$). Donc elles sont parallèles.
D'autre part, d' n'est pas sécante à $\mathscr{P}$. En effet, si elle l'était, comme $d//d'$, d serait aussi sécante à $\mathscr{P}$, ce qui est impossible. Donc d' est parallèle à $\mathscr{P}$.
Notons Δ la droite d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, on voit que d' et Δ sont coplanaires (elles sont toutes les deux incluses dans Q) et elles ne peuvent pas être sécantes, puisque $d'//\mathscr{P}$.
Ainsi, d' et Δ sont coplanaires et non sécantes, donc elles sont parallèles.
On a donc : $d//d'$ et $d'//\Delta$. Donc $d//\Delta$. ■

Reprenons l'exemple du cube de la page 3. La droite (AB) est parallèle au plan (EFG), la face du haut. Elle est aussi parallèle au plan (DCG), la face du fond.

Les plans (EFG) et (DCG) sont sécants. Leur intersection est la droite (DC), qui est effectivement parallèle à (AB).

Conséquence :

Propriété 10 (*Théorème du toit*)

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans sécants ; soit d une droite de $\mathscr{P}$ et d' une droite de $\mathscr{Q}$. Si d et d' sont parallèles, alors elles sont aussi parallèles à la droite intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

Démonstration : La droite d est parallèle à $\mathscr{P}$ puisqu'elle est incluse dans $\mathscr{P}$; d'autre part, d est parallèle à $\mathscr{Q}$ puisqu'elle est parallèle à une droite de $\mathscr{Q}$. Donc elle est parallèle à l'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, d'après la propriété 9. ■

Géométrie dans l'espace (III) - Produit scalaire

6 Rappels sur le produit scalaire

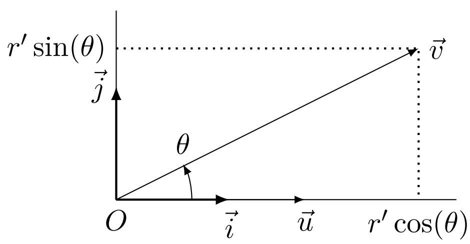
6.1 Définition

Soient $\vec{u}$ et v deux vecteurs de l'espace.

Définition 6

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est le nombre défini par une des définitions équivalentes suivantes :

1. Expression dans une base **orthonormée** :
   Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$; si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.



6.2 Propriétés usuelles

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, k un réel.

Propriété 11

1. Posons : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$. On a alors : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ (avec la convention que $\vec{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs.)
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
4. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k \times (\vec{u}\cdot\vec{v})$ (Bilinéarité.)

Remarque : La bilinéarité du produit scalaire entraîne les identités remarquables habituelles.

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \qquad (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

En particulier, si A, B, C sont des points de l'espace, on a la fameuse *formule d'Al-Kashi* :

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + AC^2$$

6.3 Droites orthogonales

Définition 7

Deux droites sont orthogonales si elles admettent des vecteurs directeurs orthogonaux.

Remarque : Deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes. Pour signifier qu'elles sont orthogonales et sécantes, on emploie le mot « perpendiculaires ».

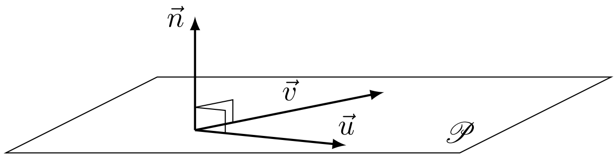
7 Vecteur normal à un plan

7.1 Définition

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathscr{P}$ un plan.

Définition 8

On dit que $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.



Propriété 12

Si un vecteur est normal à un plan, alors il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

On en déduit facilement le théorème suivant :

Théorème 2

Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Définition 9

On dit dans ce cas que la droite est orthogonale au plan.

Remarque : Une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si tout vecteur directeur de Δ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

7.2 Plans perpendiculaires

Définition 10

Deux plans sont perpendiculaires s'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

Autrement dit, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont perpendiculaires si les vecteurs normaux à $\mathscr{P}$ sont des vecteurs de $\mathscr{Q}$.

7.3 Exemples

Reprenons le cube de la page 3.

Les droites (AB) et (CG) sont orthogonales. La droite (AB) est orthogonale au plan (BFC).

Les plans (BFC) et (ABC) sont orthogonaux.

Le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est normal au plan (ABC).

7.4 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 3

Soit $\mathscr{P}$ un plan. Il existe un quadruplet de réels $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$ tels que pour tout point $M(x,y,z)$ de l'espace, $M \in \mathscr{P}$ si et seulement si $ax + by + cz + d = 0$.

Autrement dit, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ caractérise les points de $\mathscr{P}$.

Définition 11

L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est une équation **cartésienne** de $\mathscr{P}$.

Remarque : le triplet (a,b,c,d) n'est pas unique.

En effet, pour tout $k \neq 0$, l'équation $ax+by+cz+d=0$ est équivalente à l'équation $kax+kby+kcz+kd=0$. Un plan admet donc une infinité d'équations cartésiennes, les coefficients de l'une étant proportionnels aux coefficients d'une autre.

Exemples d'application :

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{P} \Longleftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Longleftrightarrow 2(x-1)-4(y+2)+1(z-0)=0 \Longleftrightarrow 2x-4y+z-10=0$$

   Ainsi, $\mathscr{P}$ admet comme équation cartésienne : $2x-4y+z-10=0$.

2. $\mathscr{P}$ est-il parallèle au plan $\mathscr{Q}$ d'équation $6x-12y+3z-5=0$?

   D'après les coefficients, $\vec{n'}\begin{pmatrix}6\\-12\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{Q}$. Or $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires, car leurs coordonnées sont proportionnelles. Donc $\mathscr{P}//\mathscr{Q}$.

3. La droite d d'équation paramétrique : $\begin{cases}x=2+3t\\y=1+t\\z=-2t\end{cases}$ est-elle orthogonale à $\mathscr{P}$?

   On voit que d admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$. Or, $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal à $\mathscr{P}$, donc d n'est pas orthogonale à $\mathscr{P}$.

4. La droite d est-elle parallèle à $\mathscr{P}$?
   On a : $\vec{n}\cdot\vec{u}=2\times3-4\times1+1\times(-2)=0$ donc $\vec{n}\perp\vec{u}$. Donc, $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$.
   Par conséquent, $d//\mathscr{P}$.

5. La droite d est-elle incluse dans $\mathscr{P}$?
   On voit que d passe par le point $A(2;1;0)$. Les coordonnées de A sont-elles solution de l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ obtenue ci-dessus ? Non, car $2\times2-4\times1+0-10=-10\neq0$. Donc A n'appartient pas à $\mathscr{P}$, donc d n'est pas incluse dans $\mathscr{P}$.

6. Déterminer les coordonnées de I, point d'intersection de d et du plan $\mathscr{R}$ d'équation $x+y+z-1=0$.
   Les coordonnées (x,y,z) de I vérifient les équations de d et de $\mathscr{R}$. On remplace donc dans l'équation de $\mathscr{R}$: x par $2+3t$, y par $1+t$ et z par $-2t$.
   On obtient : $2+3t+1+t-2t-1=0$. On résout cette équation, on trouve $t=-1$. On remplace dans le système de représentation paramétrique de d, on trouve : $x=-1,y=0,z=2$.
   Donc I a pour coordonnées $(-1;0;2)$.