Géométrie dans l'espace - Exercices

Exercice 1 :

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

1. $\vec{u}(1\,;2\,;5)$, $\vec{v}(2\,;2\,;-3)$, $\vec{w}(2\,;3\,;6)$
2. $\vec{u}(1\,;2\,;5)$, $\vec{v}(4\,;5\,;9)$, $\vec{w}(2\,;1\,;-1)$
3. $\vec{u}(1\,;2\,;-4)$, $\vec{v}(2\,;-5\,;9)$, $\vec{w}(-3\,;-6\,;12)$
4. $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{w}=3\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$
5. $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{w}=-2\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}$

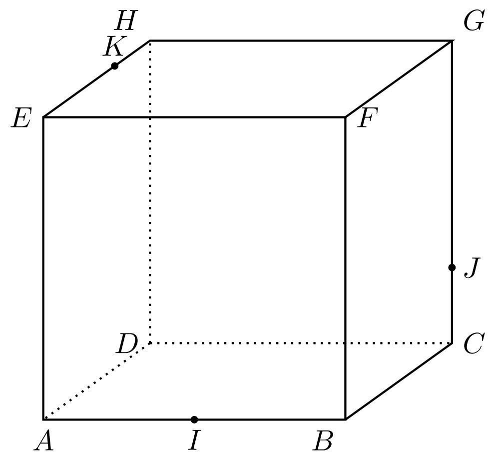
Exercice 2 :

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1. Vérifier que les vecteurs $\vec{u}(2\,;3\,;1)$, $\vec{v}(1\,;5\,;2)$, $\vec{w}(1\,;2\,;1)$ sont non coplanaires.
2. Soit $\vec{t}(8\,;10\,;12)$. Déterminer trois réels $(a\,;b\,;c)$ tels que $\vec{t}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$.
3. Les points $A(0\,;2\,;5)$, $B(-2\,;1\,;-3)$, $C(3\,;2\,;-1)$, et $D(13\,;4\,;3)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 3 :

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous. I est le milieu de $[AB]$, J est le point défini par : $\overrightarrow{CJ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CG}$ et K est le point défini par : $\overrightarrow{EK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

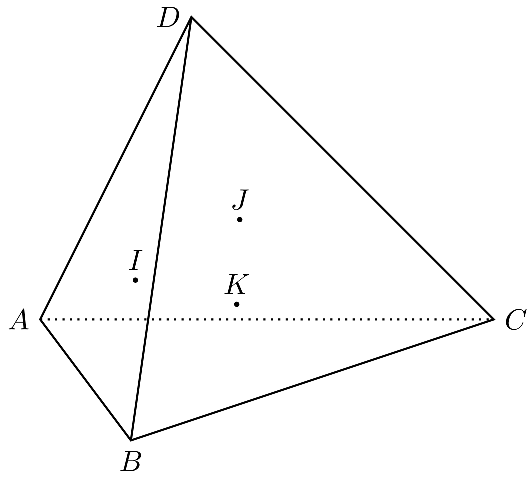


On se place dans le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH})$.

1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K dans ce repère.
2. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.
3. Déterminer a et b tels que $\vec{u}(a\,;b\,;0)$ soit un vecteur du plan IJK.
   En déduire les coordonnées du point L, intersection du plan (IJK) et de la droite (CB), puis les coordonnées du point M, intersection du plan (IJK) et de la droite (HG).
4. Déterminer a' et b' tels que $\vec{v}(0\,;a'\,;b')$ soit un vecteur du plan IJK.
   En déduire les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (EA).
5. Placer les points L, M, N et dessiner la section du cube par le plan (IJK).

Exercice 4 :

On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-dessous.



L'espace est muni du repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD})$. On considère les points $I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;\dfrac{1}{3}\right)$, $J\left(0\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$ $K\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{4}\right)$.

1. Démontrer que le point K appartient au plan (BCD).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
3. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IK).
5. En déduire les coordonnées de L, point d'intersection de (IK) et du plan (ABC). Placer L sur le dessin.
6. Démontrer que l'intersection des plans (IJK) et (ABC) est la droite d parallèle à (IJ) passant par L. Tracer d sur le dessin.

Exercice 5 :

Soient $A(-1\,;2\,;5)$, $B(2\,;-1\,;-1)$, $C(-3\,;-2\,;0)$ et $D(-5\,;0\,;4)$

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB), de la droite (AC) et de la droite (CD).
2. (AB) et (AC) sont-elles confondues ? (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
3. Le point $E(4{,}5\,;-3{,}5\,;-6)$ appartient-il à (AB) ?
4. Déterminer les points d'intersection F, G, H de (AB) avec respectivement chacun des plans $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, $(O\,;\vec{i}\,;\vec{k})$, $(O\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.
5. Soit $M(x\,;y\,;z)$, un point du plan (ABC).

   Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que : $\begin{cases} x = a + 2b - 1 \\ y = -a + 4b + 2 \\ z = -2a + 5b + 5 \end{cases}$

   Ce système constitue une représentation paramétrique du plan (ABC).
6. Le point $K(10\,;15\,;19)$ appartient-il au plan (ABC) ?
7. Montrer que la droite d intersection des plans (ABC) et $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3u + 6 \\ y = u + 1 \\ z = 0 \end{cases}$
8. En déduire une équation de la droite d dans le plan $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ sous la forme habituelle : $y = mx + p$.
9. Soit d' la droite admettant comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = s + 2 \\ y = -s - 1 \\ z = -3s + 3 \end{cases}$

   Les droites (AB) et d' sont-elles sécantes ? Même question pour d et d'.

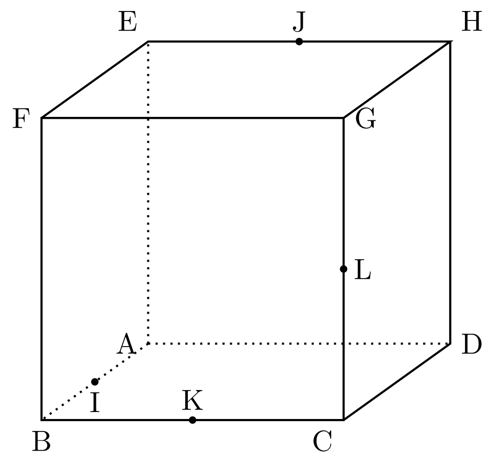
Exercice 6 (Polynésie, juin 2014) :

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A$(5\ ;\ -5\ ;\ 2)$, B$(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, C$(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et D$(6\ ;\ 6\ ;\ -1)$.

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
2. a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.
4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).
5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.
6. On admet que $\text{AB} = \sqrt{76}$ et $\text{AC} = \sqrt{61}$.
   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.

Exercice 7 (Liban, mai 2015) :

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Exercice 8 (Métropole, juin 2015) :

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A$(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$, B$(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, C$(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$, D$(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ et $N_t(11\ ;\ 0{,}8t\ ;\ 1 + 0{,}6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
   b) La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathcal{P}$.
   c) Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathcal{P}$, coupe ce plan au point E$(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.
   d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. a) Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$.
   b) À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

Exercice 9 (Antilles-Guyane, septembre 2013) :

Partie A

Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et soit P un plan.

On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\vec{u_1}$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\vec{u_2}$.

Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points A$(0\ ;\ -1\ ;\ 1)$, B$(4\ ;\ -3\ ;\ 0)$ et C$(-1\ ;\ -2\ ;\ -1)$. On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & t \\ y & = & 3t-1 \\ z & = & -2t+8 \end{array}\right.$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan P.
2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.
3. **Affirmation 3** : Le plan P a pour équation cartésienne $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
4. On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.
   Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

Exercice 10 (Centres étrangers, juin 2014) :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points : A$(1\ ;\ 2\ ;\ 7)$, B$(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$, C$(3\ ;\ 1\ ;\ 3)$, D$(3\ ;\ -6\ ;\ 1)$ et E$(4\ ;\ -8\ ;\ -4)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit $\vec{u}(1\ ;\ b\ ;\ c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.
   a) Déterminer les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.
   c) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
3. On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace dont une représentation paramétrique est :

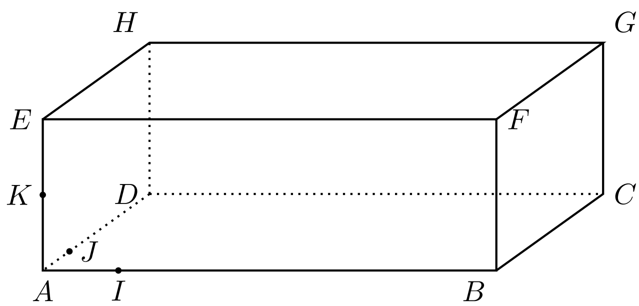
$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 2t+3 \\ y & = & -4t+5 \\ z & = & 2t-1 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

   a) La droite $\mathcal{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?
   b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).
4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

Exercice 11 (Polynésie, juin 2015) :

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.

I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). On ne demande pas de justification.

Exercice 12 (Liban, mai 2014) :

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -5 + 3t \end{cases}$$

On donne les points $A(1\ ;\ 1;\ 0)$, $B(3\ ;0\ ;\ -1)$ et $C(7\ ;1\ ;\ -2)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Proposition 2 :

Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :

Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :

La droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ au point E de coordonnées $(8;\ -3;\ -4)$.

Proposition 5 :

Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles.

Exercice 13 (Pondichéry, avril 2013) :

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions, blablabla...

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$

On donne les points de l'espace M$(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et N$(1\ ;\ -2\ ;\ 9)$.

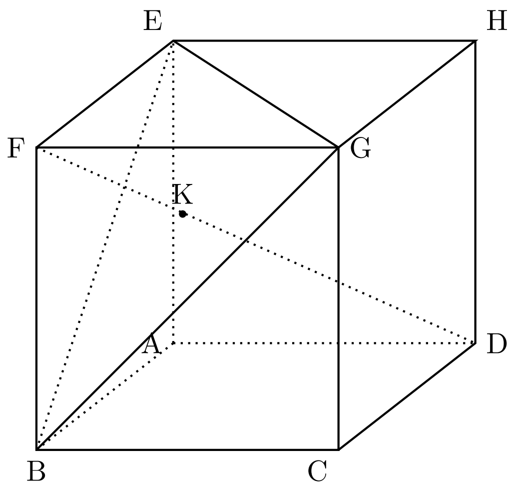
1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

   a. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 - t - 2t' \\ z = 1 - t - 3t' \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 - 2t + 2t' \\ z = -1 - t' \end{cases}$

2. a) La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point A$(-8\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   b) La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
   c) La droite (D) est une droite du plan (P).
   d) La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
3. a) La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
   b) La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
   c) La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
   d) La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.
4. a) Les plans (P) et (S) sont parallèles.
   b) La droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
   c) Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).
   d) Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

Exercice 14 (Amérique du Sud, novembre 2013) :

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).
3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $K\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.
4. Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.
5. En déduire le volume du tétraèdre BEGD.