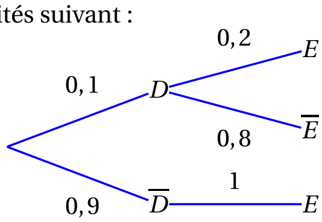
Correction du baccalauréat S Asie 18 juin 2008

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** On a la loi binomiale $X \hookrightarrow \mathscr{B}(8\,;\,0,1)$, de paramètres $n = 8$ et $p = 0,1$..

   b. $p(A) = p(X = 0) = \binom{8}{0} \times 0,1^0 \times 0,9^8 \approx 0,430 \approx 0,43$, à 10^{-2} près.
   $p(B) = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - p(A) \approx 0,57$, à 10^{-2} près.
   $p(C) = p(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,1 \times 0,9^6 \approx 0,148 \approx 0,15$, à 10^{-2} près.

2. **a.** On a l'arbre de probabilités suivant :



   b. En utilisant les branches conduisant à E et en utilisant la formule des probabilités totales :
   $p(E) = p(D) \times p_D(E) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(E) = 0,1 \times 0,2 + 0,8 \times 1 = 0,92$.

   c. $p_E(D) = \dfrac{p(E \cap D)}{p(E)} = \dfrac{0,02}{0,92} = \dfrac{1}{46} \approx 0,0217 \approx 0,022$, à 10^{-3} près.

3. On a à nouveau une épreuve binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = 1 - 0,022 = 0,978$.
   La probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos est :
   $\binom{8}{0}(0,978)^8 \times 0,022^1 = \approx 0,84$ à 10^{-2} près.
   Conclusion : ce contrôle permet de presque doubler les chances d'avoir un lot de huit stylos sans défaut.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

1. Le tableau de variations permet d'énoncer que la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$, croissante sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$, décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$ avec un extremum (maximum) en $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ égal à $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.
   Les démonstrations :
   – Variations.
     La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme fonction de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas. Sur cet intervalle on a :
     $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$.
     Comme $x^3 > 0$, le signe de cette dérivée est celui de $1 - 2\ln(x)$. On a
     $1 - 2\ln(x) > 0 = \iff \ln(x) < \frac{1}{2} \iff x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$. De même :
     $1 - 2\ln(x) < 0 = \iff \ln(x) > \frac{1}{2} \iff x > \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.
     Donc la fonction f est croissante sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.
     f a donc un maximum en $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

– Limites.
Limite en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
Limite en $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (par croissance comparée).

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, donc son graphe a une tangente en chacun de ses points $M(X\,;\,Y)$.

On a $M(X\,;\,Y) \in (T) \iff Y - f(x) = f'(x)(X-x) \iff Y - \dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}(X-x) \iff Y = \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1-2\ln x}{x^3}(X-x)$.

Donc $X = 0$ entraîne $Y = \dfrac{-1+2\ln x}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{-1+3\ln x}{x^2}$.

Donc $Y = 0 \iff -1+3\ln x = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{3} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

Il existe donc une tangente à $\mathscr{C}$ contenant O : c'est la tangente au point d'abscisse $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$ et l'équation de cette tangente est :

$$Y = \frac{1}{3\mathrm{e}}X.$$

Partie B

1. **a.** g est définie par $g(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$, alors c'est la primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 1 : f est donc la dérivée de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. Il en résulte que le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)$ ou encore celui de $\ln(x)$ puisque $x^2 > 0$.
La fonction g est décroissante sur $]0\,;\,1]$ et sur $[1\,;\,+\infty[$.
$g(1) = 0$ est donc le minimum de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[1\,;\,3]$, alors $g(3) = \displaystyle\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t$ est donc égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface limitée par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

De même $g\left(\frac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-f(t))\,\mathrm{d}t$. On a vu que sur l'intervalle d'intégration la fonction f est négative donc $-f$ est positive et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ est égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface limitée par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

3. **a.** On pose :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(t) & = & \ln(t) \\ v'(t) & = & \dfrac{1}{t^2} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\ v(t) & = & -\dfrac{1}{t} \end{array}\right.$$

Toutes ces fonctions sont dérivables, donc continues : on peut donc intégrer par parties et

$$g(x) = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t + 1}{t}\right]_1^x = -\frac{\ln x + 1}{x} + \frac{\ln 1 + 1}{1} = 1 - \frac{\ln x + 1}{x}.$$

b. On a $g(x) = 1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$. La limite des deux derniers termes est clairement nulle, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$

EXERCICE 3 **5 points**

1. **a.** $u_1 = \left(1+\dfrac{2}{1}\right)u_0 + \dfrac{6}{1} = 3\times 5 + 6 = 21$.

   b. On obtient : $d_1 = u_1 - u_0 = 16, d_2 = u_2 - u_1 = 24$, puis $d_3 = 32, d_4 = 40, d_5 = 48$.
   On peut donc conjecturer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 8 et de premier terme 16.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   On sait que, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = 16 + 8n = 8(n+2)$.
   La somme S_n des n premiers termes est :$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = n\times v_0 + 8 + 2\times 8 + \dots + (n-1)\times 8 = 16n + 8\times\dfrac{n(n-1)}{2} = 16n + 4n(n-1) = 4n^2 + 12n$.

3. Démonstration par récurrence :
   – Initialisation : $u_0 = 5$: vrai
   – Hérédité : supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
   Alors $u_{n+1} = \left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)u_n + \dfrac{6}{n+1} = \left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)\left(4n^2+12n+5\right) + \dfrac{6}{n+1}$.
   Or $4n^2 + 12n + 5 = 4(n+1)^2 - 8n - 4 + 12n + 5 = 4(n+1)^2 + 4n + 1 = 4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3$. En reportant dans u_{n+1} au dessus, on obtient :
   $u_{n+1} = \left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)\left[4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3\right] + \dfrac{6}{n+1} =$
   $4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3 + 8(n+1) + 8 - \dfrac{6}{n+1} + \dfrac{6}{n+1} = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5$.
   La relation est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : on vient de démontrer par récurrence que, quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$, d'après les questions précédentes, on déduit que : $d_n = u_{n+1} - u_n = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5 - \left(4n^2 + 12n + 5\right) = 4n^2 + 8n + 4 + 12n + 12 - 4n^2 - 12n - 5 = 8n + 16 = v_n$.
   Conclusion : la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 8 et de premier terme $d_0 = 16$.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Par définition de l'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$: $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}z$.
   Donc, en particulier : $\quad z_{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$
   De même : $z_{\mathrm{C}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}z_{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}$
   Donc A et C sont symétriques autour de l'axe des réels.

2. **a.** $|z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{B}}| = |z_{\mathrm{C}}| = 1$, donc : OA = OB = OC = 1. Les trois points A, B et C sont à la distance 1 du point O : ils appartiennent au cercle de centre O $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC.
   Construction : on dessine le cercle $(\mathscr{C})$ et le cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon 1 ; ces deux cercles sont sécants en A et C, le point A étant celui qui a une ordonnée positive. B est le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec le demi-axe contenant les points d'affixes négatives.

   b. On a $z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{C}} = 0$, autrement dit O est l'isobarycentre des points A, B et C, donc le centre de gravité du triangle (ABC). Ce triangle est isocèle en B. De plus
   $\dfrac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{-1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\times\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} - 1\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} - 1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   Le module de ce complexe est égal à 1, donc AB = AC et en conclusion le triangle (ABC) est équilatéral.

3. **a.** Cf. figure.

b. Le triangle PQR homothétique de ABC est semblable à ce triangle, donc lui aussi équilatéral.

4. **a.** L'écriture complexe de h est :

$$z' = -2z.$$

b. $z_A + z_B + z_C = 0$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

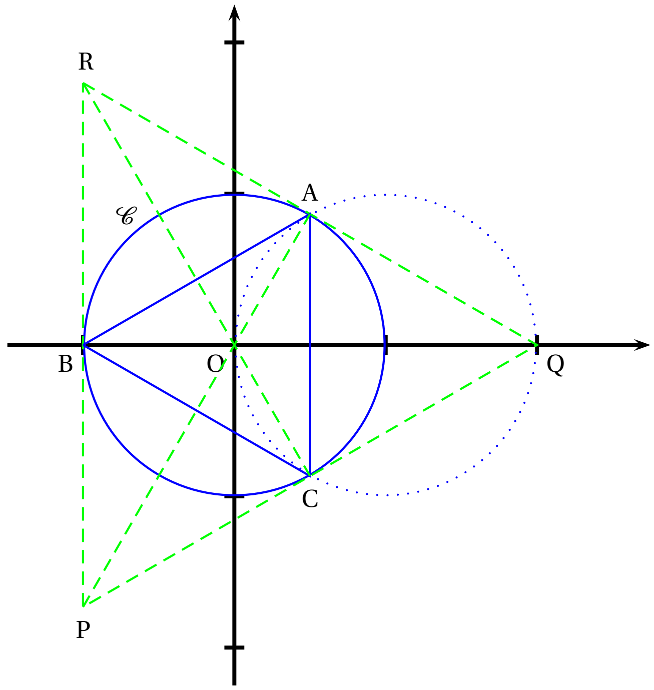
O est le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC, il en est aussi le centre de gravité (isobarycentre des points A, B et C), alors $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Par conséquent : $z_A + z_B + z_C = 0 \iff z_A = -z_B - z_C \iff z_A = \dfrac{1}{2}(-2z_B - 2z_C) = \dfrac{1}{2}\left(z_Q + z_R\right)$.

Cette égalité signifie que A est le milieu du segment [QR].

c. Par définition de l'homothétie P, O et A sont alignés. La droite (PA) médiane du triangle équilatéral (PQR) est aussi hauteur ; donc (OA) est perpendiculaire à la droite (QR).

Conclusion : cette droite (QR) est la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.



Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** L'écriture complexe de s_1 est $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$.

Les deux points A et B sont invariants par s_1 ce qui se traduit par :

$\begin{cases} 2+\mathrm{i} &= a(2-\mathrm{i})+b \\ 5+2\mathrm{i} &= a(5-2\mathrm{i})+b \end{cases} \Rightarrow$ (par différence) $3+\mathrm{i} = a(3-\mathrm{i}) \iff a = \dfrac{3+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} \iff$

$a = \dfrac{(3+\mathrm{i})^2}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})} = \dfrac{8+6\mathrm{i}}{10} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$.

En reportant dans la première équation : $b = 2+\mathrm{i} - (2-\mathrm{i})\left(\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}\right) = 2+\mathrm{i} - \dfrac{8}{5} - \dfrac{3}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i} + \dfrac{4}{5}\mathrm{i} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$.

b. On a $z_{C'} = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\text{i}\right)\times(-\text{i}) + -\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\text{i} = \frac{2}{5}-\frac{1}{5}\text{i}$.

c. Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan avec $x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$. On a $z = x+\text{i}y$ et
$z' = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\text{i}\right)(x-\text{i}y) - \frac{1}{5}+\frac{3}{5}\text{i}$.
Ce nombre est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle soit
$\frac{4}{5}x - \frac{1}{5}+\frac{3}{5}y = 0 \iff 4x-1+3y=0 \iff 4x+3y=1$.
L'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est donc la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $4x+3y=1$.

d. $\text{C}'\left(\frac{2}{5}\,;\,-\frac{1}{5}\right)\in\mathscr{D} \iff 4\times\left(\frac{2}{5}\right)+3\times\left(-\frac{1}{5}\right)=1 \iff \frac{8-3}{5}=1$ qui est vraie.
Le point C$'$ appartient donc à la droite $(\mathscr{D})$.

2. **a.** Équation cartésienne de la droite (AB) : $M(x\,;\,y)\in(\text{AB}) \iff y=\alpha x+\beta$; en particulier :
$\left\{\begin{array}{rcl}1 &=& 2\alpha+\beta\\ 2 &=& 5\alpha+\beta\end{array}\right. \Rightarrow 1=3\alpha \iff \alpha=\frac{1}{3}$; d'où $\beta = 1-2\alpha = 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.
$M(x\,;\,y)\in(\text{AB}) \iff y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}.M(x\,;\,y)\in(\mathscr{D}) \iff 4x+3y=1$.
Donc un point Ω est commun aux deux droites si et seulement si $4x+3\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)=1 \iff 4x+x+1=1 \iff 5x=0 \iff x=0$, d'où $y=\frac{1}{3}$. L'affixe de Ω est donc $\omega=\frac{1}{3}\text{i}$.

b. Les symétries axiales s_1 et s_2 sont des similitudes indirectes de rapport 1. Leur composée est une similitude directe dont le rapport est le produit des rapports des deux similitudes, donc égal à 1.
Plus précisement si $z' = a\overline{z}+b,\ |a|=1$ est l'écriture complexe de s_1 et si $z' = c\overline{z}+d,\ |c|=1$ est l'écriture complexe de s_2, alors si $M(z)$ a pour image $M'(z')$ par s_1 et $M''(z'')$ est l'image de M' par s_2, on a :

$$\begin{array}{rcl}z'' &=& c\overline{z'}+d\\ &=& c\overline{\left(a\overline{z}+b\right)}+d\\ &=& c\left(\overline{a}z+\overline{b}\right)+d\\ &=& \overline{a}cz+\overline{b}c+d\end{array}$$

qui est l'écriture complexe d'une similitude directe, car $\left|\overline{a}c\right| = \left|\overline{a}\right|\times|c| = |a|\times|c| = 1$, d'après les hypothèses.

c. L'image de C par s_1 est C$'$ et comme on vient de démontrer que C$'$ appartient donc à la droite $(\mathscr{D})$ il est invariant par s_2.
Conclusion : $f(\text{C}) = \text{C}'$.
Ω appartient à (AB), donc $s_1(\Omega)=\Omega$, mais Ω appartient aussi à $\mathscr{D}$, donc $s_2(\Omega)=\Omega$.
Conclusion $f(\Omega)=\Omega$.

d. f est une similitude directe de rapport 1. Ce n'est ni l'identité, ni une translation c'est donc une rotation de centre Ω puisque ce point est invariant par f.

3. **a.** Le couple $(1\,;\,-1)$ est solution évidente de l'équation $(4\times1+3\times(-1)=1 \quad (1))$.
Si $(x\,;\,y)$ est une solution de l'équation on a $4x+3y=1 \quad (2)$; on a donc par différence (2) - (1) $4(x-1)+3(y+1)=0 \iff 4(x-1)=-3(y+1) \quad (3)$.
4 divise donc $-3(y+1)$, mais comme il est premier avec -3 il divise $y+1$. Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y+1=4k \iff y=-1+4k$.
En remplaçant dans (3), $4(x-1)=-3\times4k \iff x-1=-3k \iff x=1-3k$.

Les solutions de l'équation $4x+3y=1$ sont tous les couples de la forme $(1-3k\ ;\ -1+4k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Inversement $4(1-3k)+3(-1-4k)=4-12k-3-12k=1$ montre qu'un couple de la forme $(1-3k\ ;\ -1+4k)$ est solution de l'équation proposée.

b. Les points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières sont donc les points de coordonnées $(1-3k\ ;\ -1+4k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Les points M situé à moins de 9 de O sont tels que $\text{O}M < 9 \iff \text{O}M^2 < 81 \iff x^2+y^2 < 81 \iff (1-3k)^2+(-1+4k)^2 < 81 \iff 1+9k^2-6k+1+16k^2-8k < 81 \iff 25k^2-14k-79 < 0 \iff k^2-\dfrac{14}{25}k-\dfrac{79}{25} < 0 \iff \left(k-\dfrac{7}{25}\right)^2-\dfrac{49}{625}-\dfrac{79}{25} < 0 \iff \left(k-\dfrac{7}{25}\right)^2-\dfrac{2024}{625} < 0 \iff \left(k-\dfrac{7}{25}+\dfrac{\sqrt{2024}}{25}\right)\left(k-\dfrac{7}{25}-\dfrac{\sqrt{2024}}{25}\right) < 0$.

Le trinôme est positif sauf entre les racines $\dfrac{7}{25}-\dfrac{\sqrt{2024}}{25} \approx -1,51$ et $\dfrac{7}{25}+\dfrac{\sqrt{2024}}{25} \approx 2,07$.

Les entiers k solutions sont donc : -1 ; 0 ; 1 ; 2. Les quatre points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9 sont E$(4\ ;\ -5)$, F$(1\ ;\ -1)$, G$(-2\ ;\ 3)$, H$(-5\ ;\ 7)$.