

Durée : 4 heures

## Baccalauréat S Centres étrangers juin 2006

### EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

**Partie A** Restitution organisée de connaissances

En fait la démonstration n'en n'est pas une puisque tous les éléments de la démonstration sont donnés dans les prérequis.

**Partie B**

1. VRAI :  $z^2 = -\frac{1}{2}i$ , et  $z^4 = (z^2)^2 = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$ .
2. FAUX : si  $z = a + ib$ ,  $\bar{z} = a - ib$  et  $|z + \bar{z}| = 0 \iff 2a = 0 \iff a = 0$ . Donc tous les imaginaires de la forme  $bi$  avec  $b \neq 0$  vérifient la relation sans être nuls.
3. VRAI :  $z + \frac{1}{z} = 0 \iff \frac{z^2 + 1}{z} = 0 \iff z^2 + 1 = 0 (z \neq 0) \iff (z+i)(z-i) = 0 \iff z = -i$  ou  $z = i$ .
4. FAUX : Si  $z = 1$  et  $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , alors  $z + z' = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $|z| = 1$  et  $|z + z'| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$  et  $z' \neq 0$ .

### EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. Si  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  dans cet ordre, forment une progression arithmétique de raison  $r$ , alors  $p_2 = p_1 + r$ ,  $p_3 = p_1 + 2r$  et  $p_4 = p_1 + 3r$ . On a donc :

$$\begin{cases} p_4 & = p_1 + 3r = 0,4 \\ p_1 + p_1 + r + p_1 + 2r + p_1 + 3r & = 1 \text{ (loi des probabilités totales)} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} p_1 + 3r & = 0,4 \\ 4p_1 + 6r & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2p_1 + 6r & = 0,8 \\ 4p_1 + 6r & = 1 \end{cases} \implies 2p_1 = 0,2 \iff p_1 = 0,1.$$

On en déduit aussitôt que  $r = 0,1$  et finalement :

$$p_1 = 0,1, p_2 = 0,2, p_3 = 0,3, p_4 = 0,4.$$

2. **a.** La probabilité d'obtenir dans l'ordre 1, 2, 4 est  $p_{124} = 0,1 \times 0,2 \times 0,4 = 0,008$ .  
**b.** Les tirages donnant trois nombres distincts croissants sont : (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4) et (2, 3, 4). La probabilité d'avoir l'un de ces tirages est donc :

$$p_1 \times p_2 \times p_3 + p_1 \times p_2 \times p_4 + p_2 \times p_3 \times p_4 + p_2 \times p_3 \times p_4 = 0,006 + 0,008 + 0,012 + 0,024 = 0,05.$$

3. **a.** On a un schéma de Bernoulli avec  $n = 10$  et  $p_4 = 0,4$ . On sait que la probabilité d'obtenir  $i$  fois le chiffre 4 est (pour  $0 \leq i \leq 10$ ) :

$$p(X = i) = \binom{10}{i} 0,4^i (1 - 0,4)^{10-i} = \binom{10}{i} 0,4^i 0,6^{10-i}.$$

b. On a  $E(X) = \sum_{i=0}^{10} i \times p(X = i) = \sum_{i=0}^{10} i \times \binom{10}{i} 0,4^i 0,6^{10-i} = 4$ .

Cela signifie que sur un grand nombre de tirages le 4 sortira en moyenne 4 fois sur 10.

c. On a  $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$ . Or  $p(X = 0) = 0,6^{10}$ .

Donc  $p(X \geq 1) = 1 - 0,6^{10} \approx 0,9939 \approx 0,994$ , soit à peu près 994 chances sur 1 000 d'obtenir au moins une fois le 4 en 10 tirages.

4. a. La probabilité d'obtenir  $n - 1$  fois un autre chiffre que le 4 et ensuite le 4 au  $n^e$  tirage est :

$$U_n = 0,6^{n-1} \times 0,4.$$

Cette suite est une suite géométrique de premier terme  $U_1 = 0,4$  et de raison  $0,6$ . Comme  $-1 < 0,6 < 1$ , cette suite converge vers 0.

b.  $S_n = 0,4 \times 0,6^0 + 0,4 \times 0,6^1 + \dots + 0,4 \times 0,6^{n-1} = 0,4 \times \frac{1 - 0,6^n}{1 - 0,6} = 1 - 0,6^n$ .

On a de même  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$ .

c. On a  $S_n > 0,999 \iff 1 - 0,6^n > 0,999 \iff 0,6^n < 0,001 \iff$

$$n \ln 0,6 < \ln 0,001 \quad (\text{par croissance de la fonction } \ln) \iff n > \frac{\ln 0,001}{\ln 0,6}$$

car

$\ln 0,6 < 0$ . Comme  $\frac{\ln 0,001}{\ln 0,6} \approx 13,5$ , il faut donc faire 14 tirages.

## EXERCICE 2

5 points

### Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

#### Partie A. Quelques exemples

- $4 \equiv 1 \pmod{3}$ , donc  $4^n \equiv 1^n \pmod{3}$  et finalement  $4^n \equiv 1 \pmod{3}$ .
- 4 est premier avec 29 (29 est premier). Donc d'après le petit théorème de Fermat  $4^{29-1} - 1 \equiv 0 \pmod{29}$  ou encore  $4^{28} - 1$  est divisible par 29.
- $4 = 0 \times 17 + 4$ ;  
 $4^2 = 0 \times 17 + 16$ ;  
 $4^3 = 3 \times 17 + 13$ ;  
 $4^4 = 15 \times 17 + 1$ .  
 La dernière égalité montre que  $4^4 \equiv 1 \pmod{17}$ , d'où  $(4^4)^k \equiv 1^k \pmod{17}$  soit  $4^{4k} \equiv 1 \pmod{17}$  ou encore  $4^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod{17}$ .  
 Conclusion :  $4^{4k} - 1$  est divisible par 17.
- On a  $4^2 = 16 = 3 \times 5 + 1$  ou  $4^2 \equiv 1 \pmod{5}$  d'où il résulte que  $4^{2k} \equiv 1 \pmod{5}$  ou encore  $4^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$ .  
 Conclusion :  $4^n - 1$  est divisible par 5 si  $n$  est pair.  
 Par contre : de  $4 \equiv 4 \pmod{5}$  et  $4^{2k} \equiv 1 \pmod{5}$  il résulte par produit que  $4^{2k+1} \equiv 4 \pmod{5}$ .  
 Conclusion :  $4^n - 1$  est divisible par 5 si et seulement si  $n$  est pair.
- Diviseurs premiers de  $4^{28} - 1$  : la question 2 a déjà donné le nombre 29 ; la question 3 a donné le diviseur premier 17 ; la question 4 a donné le diviseur 5. D'autre part,  $4 \equiv 1 \pmod{3}$  entraîne  $4^n \equiv 1 \pmod{3}$  ou encore  $4^n - 1$  est divisible par 3 qui est premier. Il y a également 5, 43 ...

#### Partie B. Divisibilité par un nombre premier

1.  $4 = 2^2$ ; si  $p$  est premier différent de 2, il est premier avec 4, donc d'après le petit théorème de Fermat  $4^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  ou  $4^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Le premier premier différent de 2 est 3, donc  $n = p - 1 \geq 1$ .
2.
  - a. On a donc :  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $4^b \equiv 1 \pmod{p}$  et il existe un unique couple de naturels  $(q; r)$  tel que  $n = bq + r$  avec  $r < b$ . On a donc  $4^n = 4^{bq+r} = 4^{bq} \times 4^r = (4^b)^q \times 4^r$ .  
On déduit de la seconde congruence que  $(4^b)^q \equiv 1^q \pmod{p} \equiv 1 \pmod{p}$ .  
Donc  $(4^b)^q \times 4^r \equiv 4^r \pmod{p}$  et donc que  $4^n \equiv 4^r \pmod{p}$ .  
Finalement comme  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $4^r \equiv 1 \pmod{p}$ .
  - b. On vient de démontrer dans la question précédente que si  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ , alors  $n$  est multiple de  $b$ ,  $b$  étant le plus naturel positif tel que  $4^b \equiv 1 \pmod{p}$ .  
Inversement si  $n = kb$ , de  $4^b \equiv 1 \pmod{p}$ , on déduit que  $(4^b)^k \equiv 1^k \pmod{p}$  soit  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ . L'équivalence est donc démontrée.
  - c. D'après la question B. 1  $4^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  et soit  $b$  le plus petit entier tel que  $4^b \equiv 1 \pmod{p}$ . D'après la question 2. b. il en résulte que  $p - 1$  est multiple de  $b$  ou encore  $b$  (non nul) divise  $p - 1$ .

## EXERCICE 3

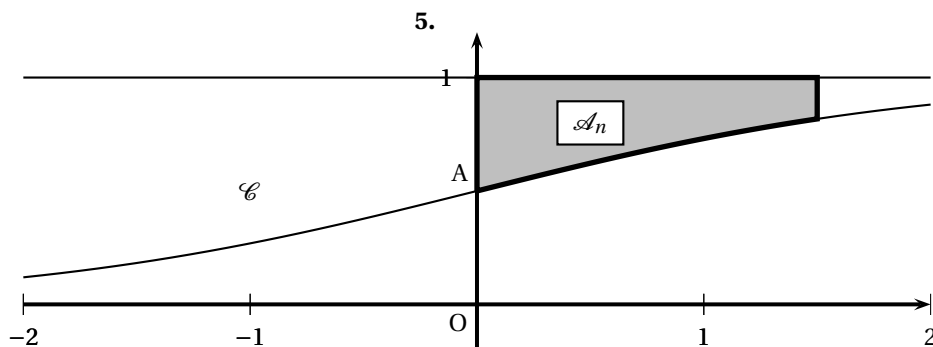
6 points

Commun à tous les candidats

Partie A Étude de la fonction  $f$ 

1. On sait que  $e^x \neq 0$ , quel que soit le réel  $x$ ;  $f(x) = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}$ .
2. On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . Interprétation graphique : l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini à  $\mathcal{C}$ .  
De même  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . Interprétation graphique : la droite d'équation  $y = 1$  est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini à  $\mathcal{C}$ .
3.  $f$  est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$ .  
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{(-e^{-x})}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$ . Comme  $e^x > 0$  pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}$ . Donc la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  (de 0 à 1).
4. Il en résulte le tableau de variations suivant :

|         |           |       |           |
|---------|-----------|-------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | $1/4$ | +         |
| $f(x)$  |           | $1/2$ | $1$       |



## Partie B

1. Quel que soit le réel  $x$ , en utilisant A. 1.

$$f(x) + f(-x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1.$$

Le milieu du segment  $[MM']$  est donc le point A de coordonnées  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ , et ce point est un centre de symétrie pour la courbe  $\mathcal{C}$ .

2. a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; on sait d'après la partie A que  $f(x) > 0$ . Donc, l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = n$  est l'intégrale  $\int_0^n f(x) dx$ .

Donc par différence avec l'aire du rectangle de côtés 1 et  $n$ ,

$$\mathcal{A}_n = \int_0^n (1 - f(x)) dx = \int_0^n \left(1 - \frac{1}{1 + e^x}\right) dx = \int_0^n \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(1 + e^x)]_{-n}^0 = \ln 2 - \ln(1 + e^{-n}),$$

en utilisant les questions A. 1 et B. 1 (symétrie autour de A).

- b. On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$  donc par continuité de la fonction  $\ln$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-n}) = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \ln 2.$$

## Partie C

1. Si pour tout  $x$  réel  $\frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2}$ , alors  $\frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} - \frac{ae^x}{e^x + 1} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2} \Leftrightarrow$   
 $\frac{e^{2x} - be^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} \Leftrightarrow \frac{e^x(e^x - b)}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} \Rightarrow a = 1 \text{ et } b = -1.$

2. On a pour tout  $\lambda$  positif,  $\mathcal{V}(\lambda) = \int_{-\lambda}^0 \pi \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} dx = \pi \int_{-\lambda}^0 \frac{e^x}{e^x + 1} dx - \pi \int_{-\lambda}^0 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx =$   
 $\pi \left[ \ln(1 + e^x) + \frac{1}{e^x + 1} \right]_{-\lambda}^0 = \pi \left( \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-\lambda}) - \frac{1}{1 + e^{-\lambda}} \right).$

3. On a toujours  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$  et par continuité de la fonction  $\ln$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-n}) = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\lambda) = \pi \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

## EXERCICE 4

6 points

## Partie A

1. Les faces du cube d'arête 1 sont des carrés de côté 1, dont les diagonales ont pour longueur  $\sqrt{2}$ . En particulier  $BD = DE = ED = \sqrt{2}$ . Le triangle BDE est équilatéral.
2.
  - a. I est le centre de gravité du triangle BDE ou l'isobarycentre des points B, D et E. Les coordonnées de I sont de la forme  $\frac{1}{3}(a_B + a_D + a_E)$ . Avec le repère choisi on a  $B(1; 0; 0)$ ,  $D(0; 1; 0)$  et  $E(0; 0; 1)$ .  
On obtient donc  $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .
  - b. On a dans le repère choisi  $G(1; 1; 1)$ , donc le vecteur  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$  et le vecteur  $\overrightarrow{AI}$  ont les mêmes coordonnées.  
Autre démonstration : on sait que  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG} = \vec{0} \iff \overrightarrow{IA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ .  
La relation vectorielle  $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$  signifie que les points A, I et G sont alignés, et encore plus précisément que le point I appartient à la droite (AG), ce point ayant l'abscisse  $\frac{1}{3}$  si le repère choisi sur cette droite est le repère (A, G).
3. On sait déjà que I centre de gravité du triangle BDE est dans le plan (BDE).  
D'autre part  $\overrightarrow{IA} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Le produit scalaire  $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$ , donc les vecteurs sont orthogonaux.  
De même  $\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Le produit scalaire  $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$ , donc les vecteurs sont orthogonaux.  
Conclusion le vecteur  $\overrightarrow{IA}$  orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) est normal à ce plan.  
Conclusion : I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

### Partie B

Quel que soit le réel  $k$ ,  $M_k$  est le point de la droite (AG), d'abscisse  $k$  pour le repère (A, G).

La droite  $(AM_k)$  est donc orthogonale au plan (BDE), donc aussi au plan  $\mathcal{P}_k$ .

Conclusion : le point  $N_k$  est le projeté orthogonal de A sur le plan  $\mathcal{P}_k$ .

1. D'après la partie A, on sait que si  $k = \frac{1}{3}$ ,  $M_{\frac{1}{3}} = I$ , donc  $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}} = (BDE)$  et  $N_{\frac{1}{3}} = B$
2.
  - a. Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AM_k}$  sont les coordonnées du point  $M_k$ , soit  $(k; k; k)$ .
  - b. On sait qu'une équation du plan  $\mathcal{P}_k$  est de la forme  $kx + ky + kz + d = 0$ ; comme il contient  $M_k$ , on a  $k^2 + k^2 + k^2 + d = 0 \iff d = -3k^2$ . L'équation du plan  $\mathcal{P}_k$  est donc  $kx + ky + kz - 3k^2 = 0$  soit pour  $k \neq 0$  (cas particulier où  $M$  est en A)  $x + y + z - 3k = 0$ .
  - c. La droite (BC) est définie par les équations des deux plans  $x = 1$  et  $z = 0$ , donc en remplaçant dans l'équation précédente  $1 + y + 0 - 3k = 0 \iff y = 3k - 1$ .  
Donc  $N_k(1; 3k - 1; 0)$ .
3.  $\overrightarrow{M_k}$  et  $N_k$  appartiennent au plan  $\mathcal{P}_k$  qui est orthogonal aux vecteurs  $\overrightarrow{AM_k}$  ou  $\overrightarrow{AG}$ . Donc pour tout  $k$  réel la droite  $(M_k N_k)$  est orthogonale à la droite (AG);

Les coordonnées de  $\overrightarrow{M_k N_k}$  sont  $(1 - k ; 2k - 1 ; -k)$ , celles de  $\overrightarrow{BC}$  sont  $(0 ; 1 ; 0)$ .

$$\overrightarrow{M_k N_k} \cdot \overrightarrow{BC} = 2k - 1 = 0 \iff k = \frac{1}{2}.$$

4. On a  $M_k N_k^2 = (1 - k)^2 + (2k - 1)^2 + (-k)^2 = 6k^2 - 6k + 2$ . La distance est minimale si son carré l'est.

On a à trouver le minimum d'un trinôme :

$$6k^2 - 6k + 2 = 6 \left( k^2 - k + \frac{1}{3} \right) = 6 \left[ \left( k - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right].$$

Cette expression est minimale quand le carré est nul soit encore pour  $k = \frac{1}{2}$ .

Non demandé : cette distance est égale à  $\sqrt{6 \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

5.

### Section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$

