Mathématiques - Devoir surveillé n° 8

Exercice 1 (6 points)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^4 x^2\, \mathrm{e}^{x^3+1}\, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^\pi \sin(3x) \mathrm{d}x$

Exercice 2 (14 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ ainsi que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$ sont données ci-dessous dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est croissante et positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote la droite $(\mathscr{D})$.

   (b) Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
3. Soit I l'intégrale définie par : $I = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) - x]\, \mathrm{d}x$.

   On ne cherchera pas à calculer I.

   (a) Donner une interprétation géométrique de I.

   (b) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\ln(1+t) \leqslant t$. (On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \ln(1+t) - t$.)

   Dans la suite, on admettra que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\dfrac{t}{t+1} \leqslant \ln(1+t)$.

   (c) En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

   $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} \leqslant \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

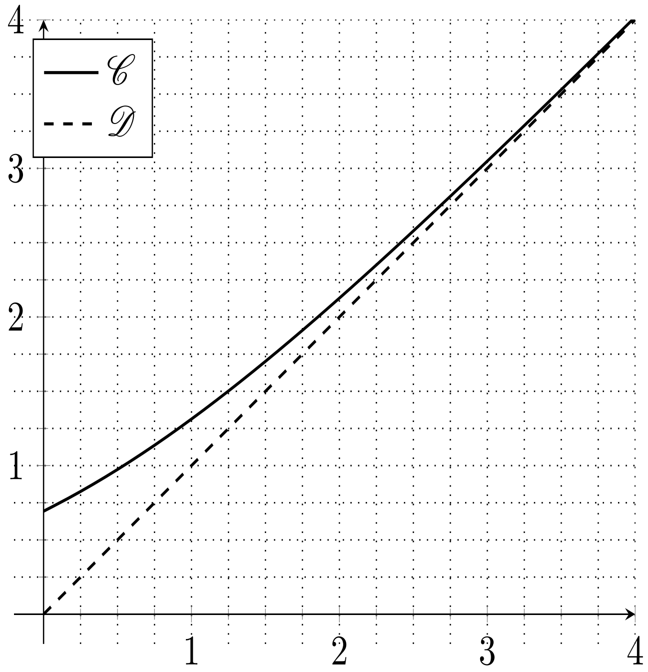
   (d) Montrer que $\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right) \leqslant I \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

   (e) En déduire un encadrement de I d'amplitude $0,4$ par deux nombres décimaux.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.

   On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à $0,5$ mm.

   Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.



4
3
2
1
1
2
3
4
$\mathscr{C}$
$\mathscr{D}$