Correction du devoir surveillé nº8

Exercice 1 :

1. Méthode habituelle : on pose $u(x)$ l'exposant de e.
   Ici : $u(x)=x^3+1$. On en déduit : $u'(x)=3x^2$.
   On sait qu'une primitive de $x\to u'(x)\times e^{u(x)}$ est $x\to e^{u(x)}$.
   On peut donc écrire :
   $\int_0^4 x^2 e^{x^3+1}\,dx=\int_0^4 \frac{1}{3}3x^2e^{x^3+1}\,dx=\int_0^4 \frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}\,dx=\left[\frac{1}{3}e^{u(x)}\right]_0^4=\frac{1}{3}\left(e^{4^3+1}-e^{0^3+1}\right)=\frac{1}{3}\left(e^{65}-e\right)$

2. Ici, on peut procéder de deux façons :
   * Soit poser $u(x)$ ce qu'il y a sous le signe « racine carrée » et procéder comme pour la question 1
   * Soit remarquer que la fonction u est affine.

   Première méthode :
   On pose $u(x)=3x+1$. Alors $u'(x)=3$.
   On sait qu'une primitive de $x\to\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ est $x\to 2\times\sqrt{u(x)}$.
   On a donc :
   $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx=\int_1^4 \frac{1}{3}\times\frac{3}{\sqrt{3x+1}}\,dx=\int_1^4 \frac{1}{3}\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,dx=\left[\frac{1}{3}\times 2\sqrt{u(x)}\right]_1^4=\frac{2}{3}\left(\sqrt{3\times4+1}-\sqrt{3\times1+1}\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{13}-2\right)$

   Deuxième méthode :
   On sait que si f et u sont deux fonctions telles que : $f(x)=u(ax+b)$, où a et b sont des constantes, alors en appelant F une primitive de f et U une primitive de u , on a :
   $F(x)=\frac{1}{a}U(ax+b)$.
   Ici, si on pose $u(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$, alors $f(x)=u(3x+1)$ donc $F(x)=\frac{1}{3}\times U(3x+1)$
   Or $U(x)=2\times\sqrt{x}$.
   On obtient donc : $F(x)=\frac{1}{3}\times 2\times\sqrt{3x+1}$.
   D'où : $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx=\int_1^4 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3x+1}\right]_1^4=\frac{2}{3}\left(\sqrt{13}-2\right)$ comme précédemment.

3. On peut procéder comme dans la question 2, méthode 2 :
   Posons $f(x)=\sin(3x)$; on sait qu'une primitive de $\sin$ est $-\cos$.
   Donc une primitive de f est F : $F(x)=\frac{1}{3}\times(-\cos(3x))$.
   Ainsi : $\int_0^\pi \sin(3x)\,dx=\left[\frac{1}{3}\times(-\cos(3x))\right]_0^\pi=\frac{1}{3}\left(-\cos(3\pi)+\cos(0)\right)=\frac{1}{3}\left(-(-1)+1\right)=\frac{2}{3}$.

Exercice 2 :

1. On étudie f comme d'habitude.
   Rappel : la dérivée de $x\to\ln(u(x))$ est $x\to\frac{u'(x)}{u(x)}$.
   Avec $u(x)=1+e^{-x}$, on obtient $u'(x)=-e^{-x}$.
   Rappelons que, plus généralement, la dérivée de $x\to e^{ax+b}$ est $x\to a\times e^{ax+b}$.

On obtient donc : $f'(x)=1+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1}{1+e^{-x}}$.

Comme $e^{-x}>0$ pour tout x réel, on a $f'(x)>0$ pour tout x .

On obtient le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\ln(2)$ $\nearrow$	

On calcule facilement : $f(0)=0+\ln(1+e^{0})=\ln(2)$.

Ainsi, f est croissante, et comme $f(0)>0$, alors pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)>0$: f est positive.

2.

a) On a : $f(x)-x=\ln(1+e^{-x})$.

Il s'agit donc de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-x}=1\\ \lim\limits_{x\to 1}\ln(x)=0\end{array}\right\}$ donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$.

Ainsi, la courbe $(\mathscr{C})$ a bien pour asymptote la droite $(\mathscr{D})$.

b) La droite $(\mathscr{D})$ représente la fonction $h:h(x)=x$.

Ainsi, on a : $f(x)-h(x)=\ln(1+e^{-x})$.

Or, $e^{-x}>0$ pour tout x .

Donc $1+e^{-x}>1$.

Vu que ln est croissante, ceci implique : $\ln(1+e^{-x})>\ln(1)$ soit $\ln(1+e^{-x})>0$.

Ainsi, pour tout $x\geqslant 0$, on a : $f(x)-h(x)>0$.

Ceci montre que le point de coordonnée $(x;f(x))$ est toujours au-dessus du pont de coordonnées $(x;h(x))$. Autrement dit : $(\mathscr{C})$ est au-dessus de $(\mathscr{D})$.

3.

a) Remarquons que la fonction à intégrer est positive sur [0 ; 1], d'après la question précédente.

On a : $\int_0^1[f(x)-x]\,dx=\int_0^1[f(x)-h(x)]\,dx$ et $f(x)>h(x)$ sur [0 ; 1].

D'après le cours, cette intégrale représente l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, la droite $(\mathscr{D})$, et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

b) Étudions la fonction g de l'énoncé.

On sait que la dérivée de $x\to\ln(u(x))$ est $x\to\frac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc la dérivée de $x\to\ln(1+t)$ est $x\to\frac{1}{1+t}$.

Ainsi : $g'(t)=\frac{1}{1+t}-1=\frac{1}{1+t}-\frac{1+t}{1+t}=\frac{1-1-t}{1+t}=-\frac{t}{1+t}$.

Comme t et $1+t$ sont positifs, on a $g'(t)\leqslant 0$ pour tout $t\geqslant 0$ .On obtient le tableau :

x	0 $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 $\searrow$

On a : $g(0)=\ln(1)-0=0$. Donc pour tout $t\geqslant 0$, $g(t)\leqslant 0$.
Autrement dit : $\ln(1+t)-t\leqslant 0$ soit $\ln(1+t)\leqslant t$.

c) On a pour tout x réel : $e^{-x}>0$. On peut donc remplacer t par e^{-x} dans les deux inégalités précédentes.

On obtient : $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\leqslant\ln(1+e^{-x})\leqslant e^{-x}$.

d) On applique la propriété de croissance de l'intégrale :

$\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\leqslant\ln(1+e^{-x})\leqslant e^{-x}$ sur [0 ; 1] implique $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx\leqslant\int_0^1\ln(1+e^{-x})\,dx\leqslant\int_0^1 e^{-x}\,dx$.

Calculons la première et la dernière intégrale de cet encadrement.
La première :

Posons : $u(x)=1+e^{-x}$. Alors $u'(x)=-e^{-x}$, donc $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=-\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de $x\to\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est $x\to\ln(u(x))$.

Donc :

$$\int_0^1\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx=\int_0^1-\frac{u'(x)}{u(x)}\,dx=\left[-\ln(u(x))\right]_0^1=\left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1=-\ln(1+e^{-1})+\ln(1+e^{0})=\ln(2)-\ln(1+e^{-1})$$

ce qui donne en appliquant la formule : $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

$$\int_0^1\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx=\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right).$$

La dernière:
Une primitive de $x\to e^{-x}$ est $x\to -e^{-x}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}+e^{0}=1-e^{-1}$.

On obtient donc l'encadrement : $\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right)\leqslant I\leqslant 1-e^{-1}$.

e) On a : $\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-x}}\right)\simeq 0{,}3799$ et $1-e^{-1}\simeq 0{,}6321$.

Donc $0{,}3\leqslant I\leqslant 0{,}7$. C'est bien un encadrement d'amplitude 0,4.

4. D'après l'énoncé, la distance *MN* est donné en unités graphiques par $f(x)-x$.
Attention : **l'unité graphique vaut 2 cm**.
Il faut convertir : 0,5 mm = 0,05cm = $0{,}025\times 2$ cm = 0,025 unités graphiques.

Il faut donc résoudre : $f(x)-x\leqslant 0{,}025$.
On remplace :
$\ln(1+e^{-x})\leqslant 0{,}025$

on applique la fonction exponentielle, qui est croissante :
$1+e^{-x} \leqslant e^{0,025}$
$e^{-x} \leqslant e^{0,025}-1$
On passe au logarithme (fonction croissante) :
$-x \leqslant \ln\left(e^{0,025}-1\right)$
$x \geqslant -\ln\left(e^{0,025}-1\right)$

On trouve : $x \simeq 3,68$.
L'ensemble cherché est donc : [3,68 ; +∞[.

Voilà.