Limites de fonctions

I] Définitions (rappels) :

Soit *f* une fonction numérique ; A, B, l, r, a des nombres réels.

L'expression :	Signifie :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout x assez grand.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout x assez grand.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$	Quel que soit le nombre strictement positif r (même très proche de 0), $l - r \leq f(x) \leq l + r$ pour tout x assez grand.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout x assez négatif.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout x assez négatif.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$	Quel que soit le nombre strictement positif r (même très proche de 0), $l - r \leq f(x) \leq l + r$ pour tout x assez négatif.
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout x supérieur à a et assez proche de a.
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout x supérieur à a et assez proche de a.
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$	Quel que soit le nombre strictement positif r (même très proche de 0), $l - r \leq f(x) \leq l + r$ pour tout x supérieur à a et assez proche de a.
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout x inférieur à a et assez proche de a.
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout x inférieur à a et assez proche de a.
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$	Quel que soit le nombre strictement positif r (même très proche de 0), $l - r \leq f(x) \leq l + r$ pour tout x inférieur à a et assez proche de a.

Remarques :

1. L'écriture $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ldots$ (on ne précise pas a^+ ou a^-) sous-entend que les limites en a^+ et a^- sont **égales**.

2. Lorsque $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, autrement dit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, on dit que *f* est **continue** en a.

II] Propriété I (règles opératoires) :

Dans chacun des tableaux, x tend vers $+\infty$; on a les mêmes règles lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers a^- ou a^+.

Somme :

Si : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + g(x) =$	$l + m$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Produit :

Si : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$	l	$l\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
et : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=$	m	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x)=$	lm	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	forme indéterminée

Le signe est donné par la règle des signes

Inverse :

Rappel : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$ signifie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ **et** $f(x)>0$ pour tout x assez grand.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^-$ signifie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ **et** $f(x)<0$ pour tout x assez grand.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$	$a\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0^+	0^-	0
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}=$	$\frac{1}{a}$	0	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Règle empirique : on effectue la même opération sur les limites que celle effectuée sur les fonctions sous réserve que cette opération ait un sens.

III] Propriété 2 (limites de référence) :

Limites en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x=\lim_{x\to+\infty} x^2=\lim_{x\to+\infty} x^3=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0 .$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \;;\; n\in\mathbb{N} \;;\; \lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

Limites en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} x=\lim_{x\to-\infty} x^3=\lim_{x\to-\infty} x^5=\ldots=-\infty \;;\; \lim_{x\to-\infty} x^2=\lim_{x\to-\infty} x^4=\ldots=+\infty \;;\; \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=\ldots=0 .$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0 \;;\; \lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0 \;;\; n\in\mathbb{N} .$$

Limites en 0^+ :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^3=\ldots=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}=0 \;;\; \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^3}=\ldots=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty .$$

$$\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty \;;\; \lim_{x\to0^+} x\ln(x)=0^- .$$

Limites en 0^- :

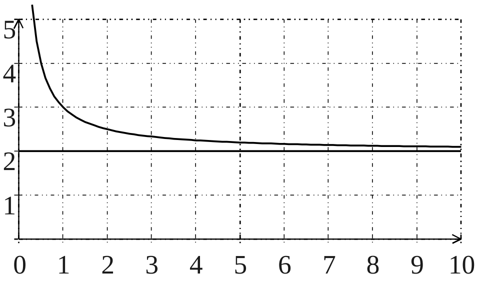
$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x^2=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x^3=\ldots=0 \;;\; \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^3}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^5}=\ldots=-\infty \;;\; \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^4}=\ldots=+\infty .$$

Limite en 0 :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1 .$$

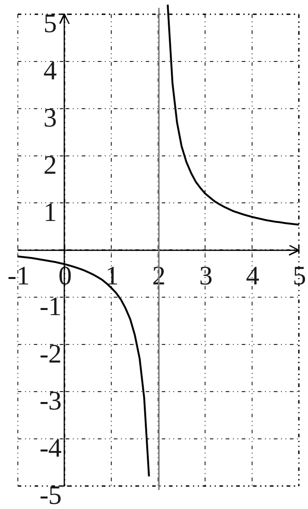
IV] Asymptotes

1) Asymptotes « horizontales ».



Soit f une fonction et b un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, alors la droite (d) d'équation $y = b$ est asymptote (« horizontale ») à la courbe représentative de f.

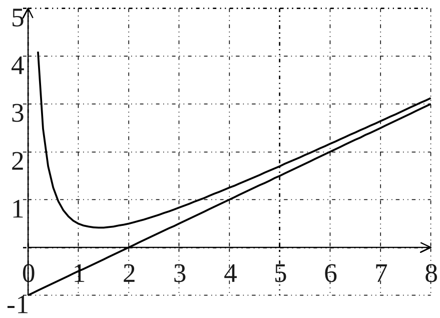


2) Asymptotes « verticales ».

Soit f une fonction et a un nombre réel.

Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$, alors la droite (d) d'équation $x = a$ est asymptote (« verticale ») à la courbe représentative de f.

3) Asymptotes « obliques ».



Soit f une fonction, a et b des réels.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$, ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$, alors la droite (d) d'équation $y = ax+b$ est asymptote (« oblique ») à la courbe représentative de f.

V] Propriété 3 (théorèmes de comparaison) :

La propriété est donnée ici dans le cas où x tend vers $+\infty$; elle reste vraie lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers a^- ou a^+.

Théorème 1 (limites et inégalités) :

Soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ existent et sont finies.

Si $f(x)\leq g(x)$ pour tout x suffisamment grand, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\leq \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Théorème 2 (« théorème des gendarmes ») :

Soient f, g, h, trois fonctions telles que :

- Pour tout x assez grand, on a : $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Alors on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Théorème 3 (théorème du gendarme qui a perdu son collègue) :

Soient f et g deux fonctions telles que $f(x)\leq g(x)$ pour x suffisamment grand.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

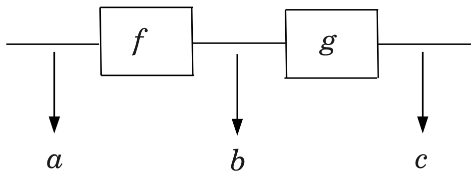
VI] Composition et limites :

Théorème 4 (limite d'une composée de fonctions) :

Soient f, g deux fonctions ; a, b, c peuvent représenter soit des réels, éventuellement affectés des symboles $^+$ et $^-$, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Illustration :



Définition :

On note $g \circ f$ la fonction composée « f suivie de g ».

On a donc par définition : $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Le théorème 4 peut donc s'écrire sous la forme :

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c$.

Théorème 5 (limite de la composée d'une suite et d'une fonction) :

Soient f, une fonctions ; u une suite ; a, b peuvent représenter soit des réels, éventuellement affectés des symboles $^+$ et $^-$, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \to a} f(x) = b$ alors $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = b$.

Exemples :

1) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{x^2 - 3 \cdot x + 1}{-x+5}}$.

On a $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3 \cdot x + 1}{-x+5} = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{x^2 - 3 \cdot x + 1}{-x+5}} = 0$.

2) Déterminer $\lim_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

On a $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$.

3) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} 2^n \cdot \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Posons : $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Alors $2^n \cdot \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}} = f\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Or, on a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} 2^n \cdot \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1$.