Correction du devoir surveillé nº2

Exercice 1 :

1. On utilise les règles usuelles de calculs des limites (tableaux du cours) :

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 5\sqrt{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = +\infty$

   b) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 5x+2=12$;

   $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 2-x=0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{1}{2-x}=-\infty$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{5x+2}{2-x}=-\infty}$

   c) Le trinôme x^2-4 a pour racines évidentes 2 et −2 ; il est du signe de a=1, donc positif, sauf lorsque $x\in\left]-2;2\right[$. Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x^2-4=0^+$.

   On peut dire aussi : la fonction « carré » est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$, donc $x>2$ implique $x^2>4$, soit $x^2-4>0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x^2-4=0^+$.

   On obtient alors : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{1}{x^2-4}=+\infty$.

   Par conséquent $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{\sqrt{3}}{x^2-4}=+\infty}$

   d) On utilise la propriété concernant la limite d'une fonction composée.

   Posons : $u(x)=\frac{x^2+7x+1}{x+3}$ et $v(x)=\sqrt{x}$; on a alors : $\sqrt{\frac{x^2+7x+1}{x+3}}=v(u(x))$.

   On a d'abord : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+7x+1}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

   D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$.

   Donc, par composition : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+7x+1}{x+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty} u(v(x))=+\infty}$

2. On utilise la propriété sur la limite de la composée d'une suite et d'une fonction.

   Posons : $v_n=\frac{n+3}{n^2+1}$ et $f(x)=\cos(x)$.

   On alors : $u_n=f(v_n)$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+3}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$

   D'autre part : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0} \cos(x)=\cos(0)=1$ car la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.

   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)=1}$

Exercice 2 :

x	0		$\pi/4$		$5\pi/4$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Rappel : les flèches dans le tableau signifient que la fonction est continue et strictement monotone (croissante ou décroissante).
Ainsi, f est continue et strictement croissante sur [0 ; π/4].
De plus, $f(0)=0$ et $f(\pi/4)=5$, donc $1\in[f(0);f(\pi/4)]$
D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=1$ a donc une solution unique sur [0 ; π/4].

De même, f est continue et strictement décroissante sur [π/4 ; 5π/4].
De plus, $f(\pi/4)=5$ et $f(5\pi/4)=-2$, donc $1\in[f(\pi/4);f(5\pi/4)]$.
D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=1$ a donc une solution unique sur [π/4 ; 5π/4].

Enfin, f est strictement croissante sur [5π/4 ; 2π].
Or $f(2\pi)=0$. Par conséquent, pour tout $x\in[5\pi/4;2\pi]$, $x\leqslant 0$.
Donc, l'équation $f(x)=1$ n'a pas de solution sur [5π/4 ; 2π].

Conclusion : l'équation $f(x)=1$ admet bien 2 solutions sur [0 ; 2 π] : une sur [0 ; π/4], une sur [π/4 ; 5π/4] et aucune sur [5π/4 ; 2π].

Exercice 3 :

On emploie la formule donnant la dérivée d'un produit.

$$f'(x)=1\times\cos(x)+(x+2)\times(-\sin(x))=\cos(x)-(x+2)\sin(x)$$

On emploie la formule donnant la dérivée d'un quotient :

$$h'(x)=\frac{(-\sin(x))\times(3+\sin(x))-(3+\cos(x))\times(\cos(x))}{(3+\sin(x))^2}=\frac{-3\sin(x)-\sin^2(x)-(3\cos(x)+\cos^2(x))}{(3+\sin(x))^2}$$

$$h'(x)=\frac{-3\sin(x)-\sin^2(x)-3\cos(x)-\cos^2(x)}{(3+\sin(x))^2}=\frac{-3(\sin(x)+\cos(x))-(\sin^2(x)+\cos^2(x))}{(3+\sin(x))^2}$$

$$h'(x)=\frac{-3(\sin(x)+\cos(x))-1}{(3+\sin(x))^2}$$

Exercice 4 :

$a)$ On sait que $\cos(a)=\cos(b)$ équivaut à $\begin{cases} a=b+k2\pi \\ \text{ou} \\ a=-b+k2\pi \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Or $\cos(3x)=0$ s'écrit $\cos(3x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

C'est donc équivalent à $\begin{cases} 3x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ \text{ou} \\ 3x=\frac{-\pi}{2}+k2\pi \end{cases}$ soit $\boxed{\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+k2\frac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\frac{\pi}{3} \end{cases}}$ $k\in\mathbb{Z}$.

$b)$ On sait que $\sin(a)=\sin(b)$ équivaut à $\begin{cases} a=b+k2\pi \\ \text{ou} \\ a=\pi-b+k2\pi \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Or $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ s'écrit $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

C'est donc équivalent à $\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ \text{ou} \\ 2x+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2x=0+k2\pi \\ \text{ou} \\ 2x=\pi-\frac{2\pi}{6}+k2\pi \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=k\pi \\ \text{ou} \\ 2x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.

Soit encore $\boxed{\begin{cases} x=k\pi \\ \text{ou} \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{cases}}$ $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=2-x^2 \text{ si } x\leq 0 \\ f(x)=\frac{\sin(2x)}{x} \text{ si } x>0 \end{cases}$.

1. $2-x^2$ est un polynôme, donc f est continue sur $]-\infty\,;0[$.
   La fonction sinus est continue, et on sait que le quotient de deux fonctions continues est continu sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas.
   Donc f est continue sur $]0\,;+\infty[$.

   Il reste à étudier la continuité de f en 0.
   On a : $f(0)=2-0^2=2$.
   D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 2-x^2=2$.

   Enfin : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(2x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\frac{\sin(2x)}{2x}$.

   Or, si on pose $y=2x$, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(2x)}{2x}=\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{\sin(y)}{y}=1$.

   Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(2x)}{x}=2\times 1=2$.

On a donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)$. Donc f est continue en 0.

Conclusion : f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

2. On va étudier séparément f sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

Sur $]-\infty\,;0[$:
$f'(x)=-2x$ et $x<0$ donc f est strictement croissante. Elle est d'autre part continue, comme on l'a vu.
Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=2$.
Donc f prend une seule fois toutes les valeurs de l'intervalle $]-\infty\,;2[$. Donc l'équation $f(x)=0$ a une solution unique sur $]-\infty\,;2[$.
Un calcul direct montre d'ailleurs que cette solution est $-\sqrt{2}$.

Sur $]0\,;+\infty[$:
On a : $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{x}$. Or, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\sin(k\pi)=0$.

Donc, pour tout $k\in\mathbb{N}$, avec $k\geqslant 1$, on a : $f(k\frac{\pi}{2})=\dfrac{\sin\left(2k\frac{\pi}{2}\right)}{k\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\sin(k\pi)}{k\frac{\pi}{2}}=0$.

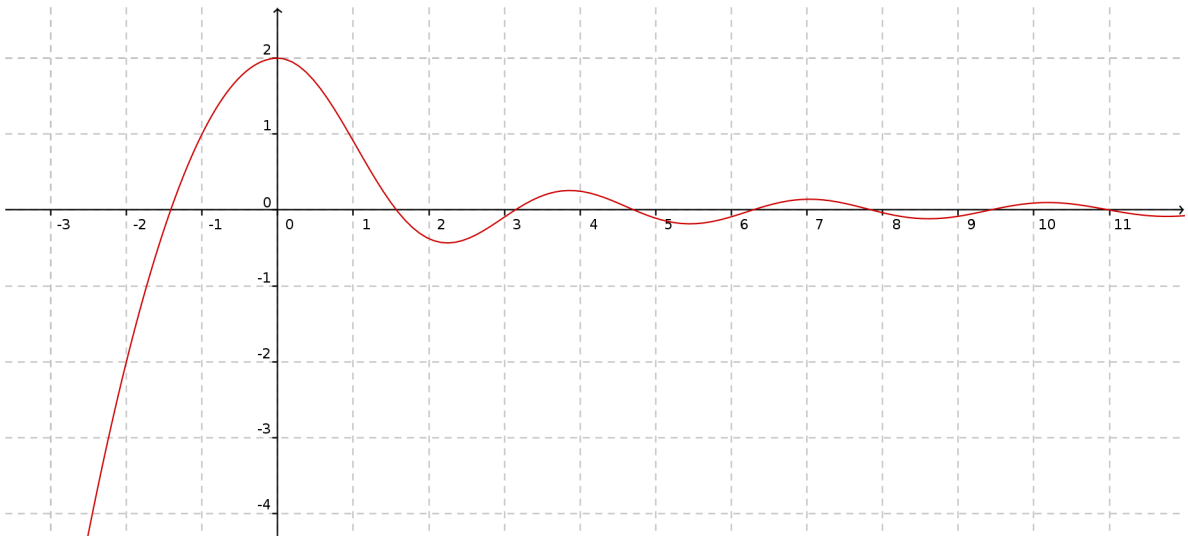
Donc, l'équation $f(x)=0$ a **une infinité de solutions**.

3. On sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$.

Par conséquent, pour tout $x\in]0\,;+\infty[$: $-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\sin(2x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$.

Or, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Si on pose : $u(x)=-\dfrac{1}{x}$; $v(x)=\dfrac{1}{x}$ pour $x\in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} u(x)\leq f(x)\leq v(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=0\end{array}\right\}$$ donc, d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$.

Pour info : l'allure de la courbe représentant f :