Correction du devoir surveillé nº4

Exercice 1 :

1. Le nombre x est positif, donc le signe de $f(x)$ est celui de $(1-\ln(x))$.
   On résout : $\ln(x) = 1$ équivaut à $x = \mathrm{e}$.
   D'où le tableau :

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	

2. Limite en $+\infty$:
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln(x))=-\infty$.
   Limite en 0 :
   On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ d'après le cours
   Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x(1-\ln(x))=\lim\limits_{x\to 0^+} x-x\ln(x)=0-0=0$.

3. La fonction f se présente comme un produit. On applique la formule classique.
   $f'(x)=1\times(1-\ln(x))+x\times\left(\frac{-1}{x}\right)=1-\ln(x)-1=-\ln(x)$
   On a $\ln(x) > 0$ pour $x > 1$ et $\ln(x) < 0$ pour $x < 1$, donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

4.
   a. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
   Ici, cela s'écrit : $y=-\ln(a)(x-a)+a(1-\ln(a))$ soit $y=-\ln(a)x+a\ln(a)+a-a\ln(a)$, donc $y=-\ln(a)x+a$.
   A est sur l'axe des ordonnées, donc son abscisse vaut 0.
   On obtient : $y_{\mathrm{A}}=0+a=a$. Donc A'(0 ; a).

   b. Il faut reporter la longueur a sur l'axe des ordonnées ; si le repère est orthonormé, un compas suffit. On place ainsi le point A'. La tangente (T_a) est la droite (AA').

Exercice 2 :

Partie A

1. Remarquons tout d'abord que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque $x^2 + 1 > 0$ pour tout x.
   $f(x)=x\Leftrightarrow\ln(x^2+1)=0\Leftrightarrow x^2+1=1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

2. On utilise la formule rappelée dans l'énoncé pour déterminer f'.
   Posons : $u(x)=x^2+1$.
   Alors $f'(x)=1-\frac{u'(x)}{u(x)}=1-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.
   Manifestement, $f'(x)$ est positif pour tout x et s'annule pour $x = 0$.
   Par conséquent, f est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc sur [0 ; 1].
   On en déduit que : si $x \in [0 ; 1]$, alors $f(x) \in [f(0) ; f(1)]$.

On calcule : $f(0)=0-\ln(0^2+1)=-\ln(1)=0$ et $f(1)=1-\ln(1^2+1)=1-\ln(2)<1$.
On a donc : $[f(0) ; f(1)] \subset [0 ; 1]$.
Conclusion : si $x \in [0 ; 1]$, alors $f(x) \in [0 ; 1]$.

Partie B

1. Soit P(n) : $u_n \in [0 ; 1]$.
   Initialisation : P(0) est vraie car $u_0 = 0$.
   Hérédité : Supposons P(n) vraie. Cela signifie que $u_n \in [0 ; 1]$.
   D'après la question A.2, on en déduit $f(u_n) \in [0 ; 1]$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$. On a donc $u_{n+1} \in [0 ; 1]$.
   Cela signifie que P(n+1) est vraie.

   Récapitulons : P(0) est vraie et P(n) implique P(n+1).
   D'après le principe du raisonnement par récurrence, on en déduit alors que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0 ; 1]$.
2. Calculons : $u_{n+1}-u_n=-\ln(u_n^2+1)$; or $u_n^2 \geq 0$ donc $\ln(u_n^2+1) \geq 0$ donc $-\ln(x^2+1) \leq 0$.
   Comme $u_{n+1}-u_n \leq 0$ alors (u_n) est décroissante.
3. La suite (u_n) est minorée (par 0) et décroissante : d'après le théorème fondamental du cours sur les suites, elle est donc convergente.
   Déterminons sa limite. Soit l cette limite.
   On a d'abord : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ (1).
   D'autre part, la fonction f est continue (car dérivable) sur [0 ; 1]. Par conséquent $\lim\limits_{x \to l} f(x)=f(l)$.
   Alors : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \\ \lim\limits_{x \to l} f(x)=f(l) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n)=f(l)$.
   Ceci s'écrit encore : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}=f(l)$ (2).
   En rapprochant les deux calculs (1) et (2), on en conclut : $l=f(l)$.
   Autrement dit, l est solution de l'équation $f(x)=x$.
   On a résolu cette équation à la question A.1. La limite l de (u_n) est donc 0.

Exercice 3 :

Partie A

1. E_2 est l'équation : $x^2 = 2^x$. On a bien sûr $2^2 = 2^2$ et on a aussi $4^2 = 2^4$.
   Donc, 2 et 4 sont bien solutions de E_2.
2. L'équation E_a est : $x^a = a^x$. En remplaçant x par a, on obtient : $a^a = a^a$. L'égalité est vraie, bien sûr.
   Donc a est toujours solution de E_a.
   On voit par conséquent que pour $a \in]0 ; +\infty[$, une équation de ce type a toujours au moins une solution.
3.
   a. On pose $x = e^t$; alors $t = \ln(x)$.
      On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^t=+\infty$. Autrement dit, quand t tend vers $+\infty$, x tend vers $+\infty$ lui aussi.
      On peut alors réécrire $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t}=+\infty$ sous la forme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)}=+\infty$.
      On peut en déduire la limite de l'inverse : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0^+$.

b. Limite en 0.
Ici, il n'y a pas de forme indéterminée.
On a évidemment : $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$.
D'autre part, d'après le cours : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)=-\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} -\mathrm{e}\ln(x)=+\infty$.
Par somme des limites, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=+\infty$.
Limite en +∞.
Ici, on a une forme indéterminée car x et ln(x) tendent tous les deux vers +∞.
Mettons x en facteur : $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1-\mathrm{e}\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.
Or, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}=0^+$, d'après la question précédente, donc : $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\mathrm{e}\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=1$.
Par conséquent, $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=+\infty$.

c. $h'(x)=1-\mathrm{e}\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\mathrm{e}}{x}$. Étant donné que x est positif, $h'(x)$ est du signe de x – e.

d. D'où le tableau suivant :

x	0		e		+∞
$h'(x)$		–	0	+	
$h(x)$	+∞	↘	0	↗	+∞

Le nombre x est solution de $\mathrm{E_e}$ si $x^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^x$.
Or, on a : $x^{\mathrm{e}}=e^x \Leftrightarrow \ln(x^{\mathrm{e}})=\ln(\mathrm{e}^x)\Leftrightarrow \mathrm{e}\ln(x)=x\Leftrightarrow x-\mathrm{e}\ln(x)=0$ c'est à dire $h(x)=0$.
D'après le tableau, $h(x) = 0$ si et seulement si x = e.
Donc l'équation $\mathrm{E_e}$ n'a qu'une solution : x = e.

Partie B

1. Par définition, x est solution de E_a si et seulement si $x^a = a^x$.
Or, par définition : $x^a=a^x\Leftrightarrow \mathrm{e}^{a\ln(x)}=\mathrm{e}^{x\ln(a)}\Leftrightarrow a\ln(x)=x\ln(a)\Leftrightarrow \dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{\ln(a)}{a}$ (on peut diviser puisque a et x sont tous deux strictement positifs).
On obtient bien l'équivalence annoncée.
2. Remarquons d'abord que, d'après la question 1, x est solution de E_a si et seulement si $f(x) = f(a)$.
a. Limite en 0 :
On sait que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)=-\infty$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty$.
On en déduit (limite d'un produit) : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\times\ln(x)=-\infty$.
Limite en +∞.
On a rappelé la formule du cours à la question A.3.a : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}=0^+$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0^+$.
b. On applique la formule donnant la dérivée d'un quotient :
$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

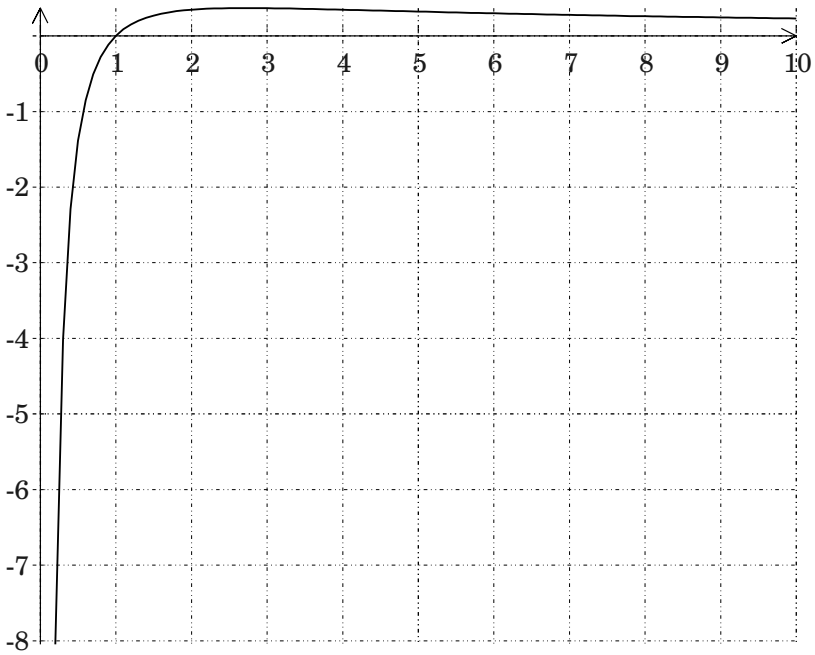
Le dénominateur est un carré donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$.

$1-\ln(x)\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq \ln(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}\leq x$.

c. D'où le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

3.



4. La fonction f est strictement croissante sur]0 ; e[et strictement décroissante sur]e +∞[d'après le tableau de la question 2.c.

On a d'autre part : $f(1)=\frac{\ln(1)}{1}=0$ et le maximum de f est $f(\mathrm{e})=\frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Distinguons trois cas :

Sur]0 ; 1[, f est strictement croissante donc si $a \in$]0 ; 1[, alors $f(a)<f(1)$, soit $f(a)<0$.

Sur]1 ; e[, f est str. croissante donc si $a \in$]1 ; e[, alors $f(1)<f(a)<f(\mathrm{e})$, soit $0<f(a)<\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Sur]e ; +∞[, f est strictement décroissante donc si $a \in$]e ; +∞[, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<f(a)<f(1)$, soit $0<f(a)<\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Pour (P_1) :

Si $a \in$]0 ; 1[, alors $f(a) < 0$.

Donc l'équation $f(x) = f(a)$ n'admet aucune solution sur]1 ; +∞[, car si $x \in$]e ; +∞[, alors $f(x)>0$.

D'autre part, comme f est strictement croissante sur]0 ; 1[, l'équation $f(x) = f(a)$ n'a qu'une seule solution sur]0 ; 1[.

En effet, si $b \in$]0 ; 1[et $b \neq a$, alors soit $b < a$ et alors $f(b) < f(a)$, soit $b > a$ et alors $f(b) > f(a)$.

L'équation $f(x) = f(a)$ admet une solution unique sur]0 ; 1[et aucune sur]1 ; +∞[, donc elle admet une seule solution sur]0 ; 1[∪]1 ; +∞[.

Pour (P_2) :

Si $a \in$]1 ; +∞[, alors $f(a) > 0$.

Donc l'équation $f(x) = f(a)$ n'admet aucune solution sur]0 ; +∞[, car si $x \in$]0 ; 1[, alors $f(x)<0$.

- Supposons : $a \in]1 ; e[$.
Comme f est strictement croissante sur $]1 ; e[$, par le même raisonnement que précédemment, l'équation $f(x) = f(a)$ n'a qu'une seule solution sur $]0 ; 1[$.
D'autre part, $f(a) \in]0 ; 1/e[$.
Sur $]e ; +\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante de $1/e$ à 0.
Donc, d'après le théorème de la bijection, pour tout $t \in]0 ; 1/e[$, l'équation $f(x) = t$ admet une solution unique sur $]e ; +\infty[$.
En particulier, c'est le cas de l'équation $f(x) = f(a)$.

Résumons :
Si $a \in]1 ; e[$, l'équation $f(x) = f(a)$ admet exactement deux solutions, une sur $]1 ; e[$ (c'est a) et une sur $]e ; +\infty[$ (qu'on note b).

Supposons : $a \in]e ; +\infty[$.
Même raisonnement que précédemment, en intervertissant les intervalles $]1 ; e[$ et $]e ; +\infty[$.
On peut conclure :
Si $a \in]e ; +\infty[$, l'équation $f(x) = f(a)$ admet exactement deux solutions, une sur $]1 ; e[$ (qu'on note b) et une autre sur $]e ; +\infty[$ (c'est a).

Ainsi, (P_1) et (P_2) sont démontrées.

Voilà.