Correction du devoir surveillé nº4

Exercice 1 :

1. $\ln(3^2)-\ln(3)=$

a : 3 **b** : $\ln(6)$ **c** : 2 **d** : $\ln(3)$

2. L'équation $\ln(x^2+x)-\ln(x)=\ln(2)$ a pour ensemble solution :

a : {2} **b** : {e} **c** : {1} **d** : { $\sqrt{2}$ }

3. L'inéquation $\ln(1+e^x)\geq 1$ a pour ensemble solution :

a : [ln(e −1) ; +∞[**b** : [0 ; +∞[**c** : ℝ **d** : {e}

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{x}=$

a : +∞ **b** : −∞ **c** : 0 **d** : 1

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}=$

a : $\dfrac{1}{2}$ **b** : 2 **c** : +∞ **d** : 0

Exercice 2 :

1. a. En 0 : D'après le cours, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

Les règles sur la limite d'un produit de fonctions entraînent alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\times\dfrac{1}{x}=-\infty$

En +∞ : On reconnaît une limite du cours : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

b. On applique la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x)=\frac{\ln'(x)\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

c. Le dénominateur est positif, donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln x$.
$1-\ln x\leq 0\Leftrightarrow 1\leq\ln x\Leftrightarrow e^1\leq e^{\ln x}$ car la fonction exponentielle est croissante, donc $1-\ln x\leq 0\Leftrightarrow e\leq x$.

On obtient le tableau suivant :

x	0		e		+∞
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ −∞	↗	1/e	↘	0

$$f(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}$$

2. a.

En 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$; d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 \times \frac{1}{x} = +\infty$.

En +∞ :

Commençons par justifier la relation de l'énoncé :

On sait que : $\ln(y^2) = 2\ln y$ pour tout $y>0$, donc en posant $y=\sqrt{x}$: $\ln\left(\sqrt{x}^2\right) = 2\ln\sqrt{x}$, soit $\ln x = 2\ln\sqrt{x}$.

Donc $(\ln x)^2 = \left(2\ln\sqrt{x}\right)^2 = 4\left(\ln\sqrt{x}\right)^2$.

D'autre part, on a évidemment $x = \sqrt{x}^2$ pour tout $x>0$.

On obtient donc : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\frac{(\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}$.

Cette relation peut s'écrire : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

Or on a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\}$ donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$.

On a alors : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \end{array}\right\}$ donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$.

On en déduit enfin : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \times \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$

b.

Calculons d'abord la dérivée de $g_1 : x \to (\ln x)^2 = \ln x \times \ln x$.

D'après la formule de dérivation d'un produit : $g_1{}'(x) = \frac{1}{x} \times \ln x + \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x}\ln x$.

On utilise ensuite la formule de dérivation d'un quotient :

$$g'(x) = \frac{g_1{}'(x) \times x - g_1(x) \times 1}{x^2} = \frac{\frac{2}{x}(\ln x) \times x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2} .$$

c.

On a : $\ln x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$; $2 - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq \ln x \Leftrightarrow e^2 \leq x$.

On obtient alors :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e^2$	$\searrow$	0

3. a.

Il faut résoudre : $f(x)=g(x)$, soit : $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

C'est équivalent à : $\ln(x)-(\ln x)^2=0 \Leftrightarrow \ln(x)(1-\ln x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=0 \\ \text{ou} \\ 1-\ln x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ou} \\ \ln x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ou} \\ x=e \end{cases}$.

Les courbes C_f et C_g possèdent donc bien deux points communs : A(1 ; 0) et $B\left(e;\dfrac{1}{e}\right)$.

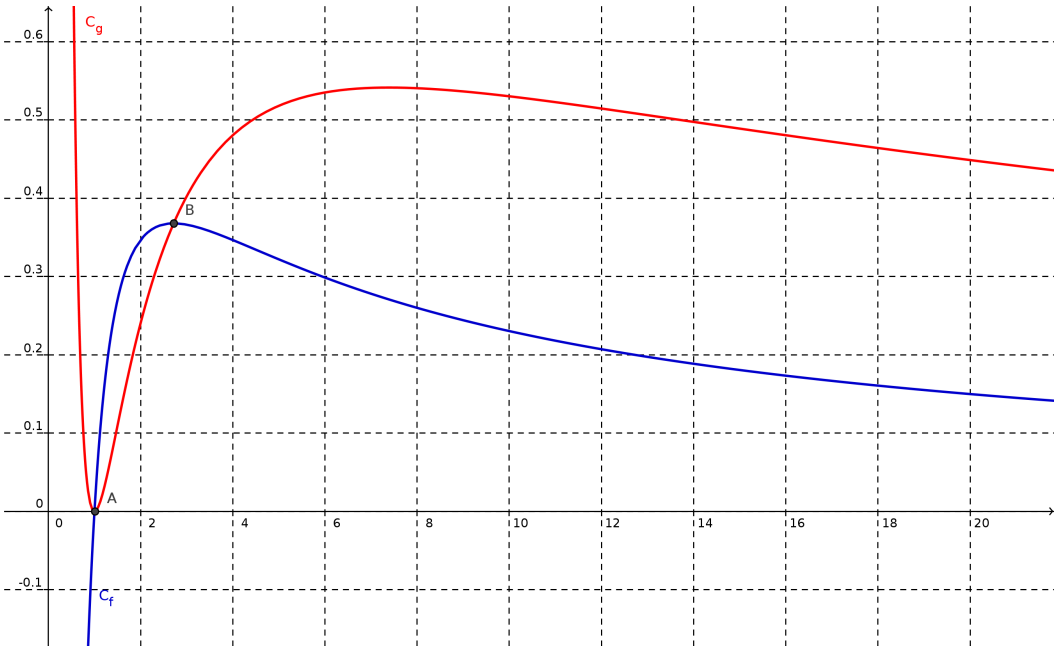
b. Position relative des courbes C_f et C_g.

Calculons $f(x)-g(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{(\ln x)^2}{x}=\dfrac{\ln x(1-\ln x)}{x}$.

Comme $x>0$, le signe est celui du numérateur.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		C_g au-dessus de C_f		C_f au-dessus de C_g		C_g au-dessus de C_f	

c. La courbe C_g :



Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par : $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=u_n-\ln(u_n+1)+1 \end{cases}$

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par : $f(x)=x-\ln(x+1)+1$.

1. On résout : $f(x)=x \Leftrightarrow x-\ln(x+1)+1=x \Leftrightarrow 1=\ln(x+1) \Leftrightarrow \mathrm{e}=x+1 \Leftrightarrow x=\mathrm{e}-1$.

2. Sens de variation de f sur l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$.

Calculons : $f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1-1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$

Comme $x>-1$, alors $x+1>0$. Donc $f'(x)$ est du signe de x .

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	1	↗	

On voit que f est strictement croissante sur [0 ; 5].

Par conséquent, $x \in [0\ ;5]$, alors $f(x) \in [f(0)\ ;f(5)]$.

Or, $f(0)=0-\ln(1)+1=1$ et $f(5)=5-\ln(6)+1\simeq 4{,}2$

Donc, si $x \in [0\ ;5]$, alors $f(x) \in [0\ ;5]$.

Partie B :

1.

Soit $P(n)$: $u_n \in [0\ ;5]$.

Initialisation : $P(0)$ est vraie car $u_0 = 5$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie : $u_n \in [0\ ;5]$.

Alors d'après la question 2 de la partie A, $f(u_n) \in [0\ ;5]$.

Or , $f(u_n) = u_{n+1}$. On obtient donc : $u_{n+1} \in [0\ ;5]$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Résumons :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ implique $P(n+1)$. D'après le principe du raisonnement par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout n.

On a bien : pour tout entier naturel n, $u_n \in [0\ ;5]$.

2.

Soit $P(n)$: $u_{n+1}\leq u_n$.

Initialisation :

$u_1=u_0-\ln(u_0+1)+1=6-\ln(6)\simeq 4{,}2<5$. Donc $u_1<u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie : $u_{n+1}\leq u_n$. Il faut prouver $P(n+1)$: $u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

D'après la question 2 de la partie A, f est croissante sur [0 ; 5]. On en déduit : $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$.

Or , $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. On obtient donc : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Résumons :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ implique $P(n+1)$. D'après le principe du raisonnement par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout n.

On a bien : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

Donc (u_n) est décroissante.

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0). D'après le cours sur les limites de suites, on sait que toute suite décroissante et minorée converge.

Donc, la suite (u_n) est convergente.

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$, (u_n) a une limite finie et f est continue.

Alors on sait que la limite l de (u_n) est solution de l'équation : $x = f(x)$.

D'après la question 1 de la partie A, la solution est : $l = \mathrm{e} - 1$.