MATHÉMATIQUES - Devoir surveillé nº4

Exercice 1 (QCM) : (5 points)

Réponse exacte : 1 point ; réponse fausse : −0,5 point.

1. $\ln(3^2)-\ln(3)=$

a : 3 **b** : $\ln(6)$ **c** : 2 **d** : $\ln(3)$

2. L'équation $\ln(x^2+x)-\ln(x)=\ln(2)$ a pour ensemble solution :

a : {2} **b** : {e} **c** : {1} **d** : $\{\sqrt{2}\}$

3. L'inéquation $\ln(1+e^x)\geq 1$ a pour ensemble solution :

a : [ln(e −1) ; +∞[**b** : [0 ; +∞[**c** : $\mathbb{R}$ **d** : {e}

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{x}=$

a : +∞ **b** : −∞ **c** : 0 **d** : 1

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}=$

a : $\dfrac{1}{2}$ **b** : 2 **c** : +∞ **d** : 0

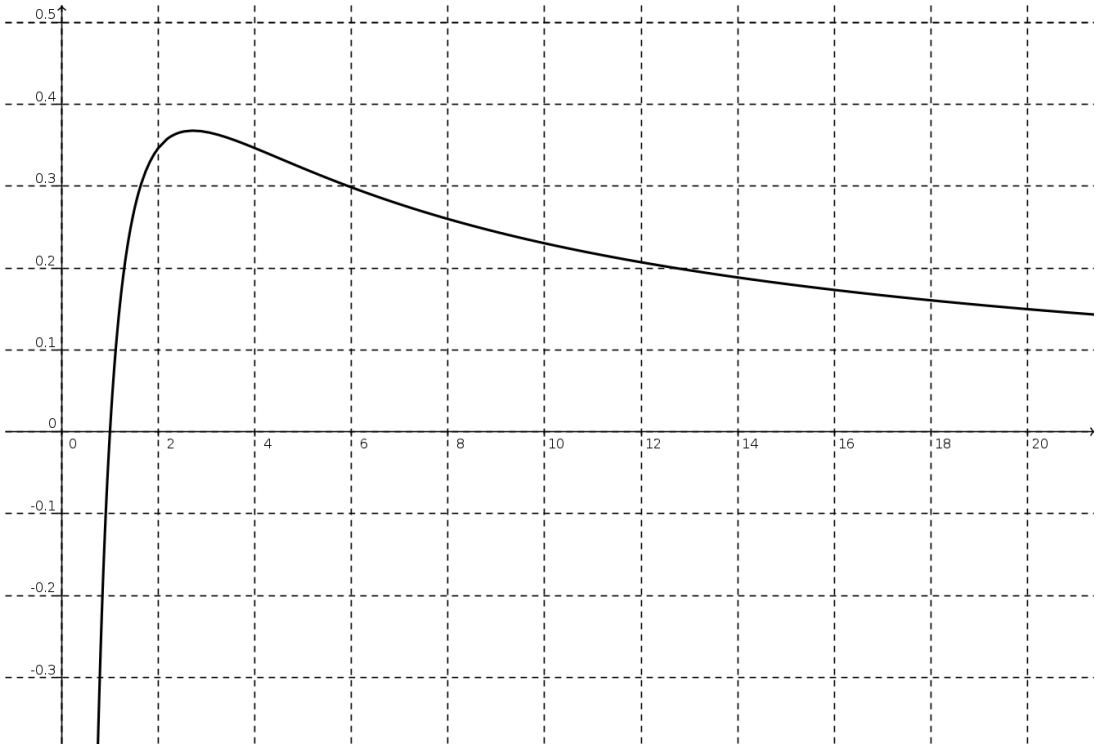
Exercice 2 : (9 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1. Étude d'une fonction *f*

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

On note *f'* la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle]0 ; +∞[. On note C_f la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère. La courbe C_f est représentée ci-après.



a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f.

c. En déduire les variations de la fonction f.

2. Étude d'une fonction g.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère $(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$.

a. Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation $\dfrac{(\ln x)^2}{x}=4\dfrac{(\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}$.

b. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3. a. Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on déterminera les coordonnées.

b. Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

c. Tracer sur le graphique la courbe C_g.

Exercice 3 : (6 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par : $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=u_n-\ln(u_n+1)+1 \end{cases}$

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par : $f(x)=x-\ln(x+1)+1$.

1. Résoudre dans $]-1\ ;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$.

2. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$.

En déduire que si $x\in[0\ ;5]$, alors $f(x)\in[0\ ;5]$.

Partie B :

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\in[0\ ;5]$.

2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.