Exercice Amérique du Sud, novembre 2007

Corrigé

1. $f_1(x)=2x-2+\ln(x^2+1)$.

   a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty$;

   $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1=+\infty \\ \lim\limits_{y\to+\infty} \ln(y)=+\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)=+\infty$ donc, en ajoutant : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2+\ln(x^2+1)=+\infty$.

   b. On rappelle la formule.

   Soit : $f(x)=\ln(u(x))$; alors lorsque $f'(x)$ est défini, il vaut : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

   Posons $u(x)=x^2+1$. On a : $f_1(x)=2x-2+\ln(u(x))$.

   D'autre part, $u'(x)=2x$. D'après la formule précédente : $f_1'(x)=2+\dfrac{2x}{x^2+1}$.

   c. On voit facilement que la dérivée est définie et positive sur [0 ; +∞[. On obtient :

x	0		$+\infty$
$f_1'(x)$		+	
$f_1(x)$	-2	↗	$+\infty$

2. $f_n(x)=2x-2+\dfrac{\ln(x^2+1)}{n}$.

   a. Comme n est un entier naturel non nul, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{n}=+\infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$.

   b. On calcule la dérivée de f_n de la même façon que celle de f. Comme n est une constante, on obtient :

   $f_n'(x)=2+\dfrac{2x}{n(x^2+1)}$.

   Vu que n est positif, f_n' est elle aussi strictement positive positive sur [0 ; +∞[. Par conséquent, f_n est strictement croissante sur [0 ; +∞[.

   c. Les fonctions $x\to x^2+1$ et $x\to\dfrac{1}{n}\ln(x)$ sont continues. La fonction composée $x\to\dfrac{1}{n}\ln(x^2+1)$ est donc continue.

   La fonction $x\to 2x-2$ est aussi continue (c'est un polynôme).

   La fonction f_n est donc continue, comme somme de fonctions continues.

   D'autre part, $f(0)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$, ce qui implique que pour tout n, il existe $a\in[0;+\infty[$ tel que, par exemple, $f(a)=1$.

   D'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x)=0$ admet donc une solution unique sur l'intervalle [0 ; a[, et donc sur [0 ; +∞[. On la note α_n.

   Remarque : a priori, cette solution dépend de n.

   d. On a vu que $f_n(0) = -2$; $f_n(1)=2-2+\dfrac{\ln(1+1)}{n}=\dfrac{\ln(2)}{n}>0$ car 2 > 1.

Donc $0 \in]f_n(0) ; f_n(1)[$. Comme f est croissante, on ne peut pas avoir alors $\alpha_n \geqslant 1$, sinon on aurait $f(\alpha_n) \geqslant f(1) > 0$. Donc $\alpha_n \in]0 ; 1[$.

3. C'est ici que ça devient intéressant.

On a : $0<n<n+1$ donc $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$ donc pour tout x : $\ln\frac{(x^2+1)}{n}>\ln\frac{(x^2+1)}{n+1}$.

Par conséquent, pour tout x : $f_n(x)>f_{n+1}(x)$.

En particulier : $f_n(\alpha_{n+1})>f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, et donc, par définition : $f_n(\alpha_{n+1})>0$.

4. a. On a démontré que la fonction f_n est strictement croissante.

Si on avait $\alpha_{n+1}\leq\alpha_n$, on aurait donc aussi $f_n(\alpha_{n+1})\leq f_n(\alpha_n)$ et donc $0<f_n(\alpha_n)$ d'après la question précédente. Ceci est impossible puisque $f_n(\alpha_n)=0$.

Donc on a : $\alpha_{n+1}>\alpha_n$.

La suite (α_n) est donc strictement croissante.

b. La suite (α_n) est croissante et majorée (par 1).

D'après le théorème fondamental du cours sur les suites, elle est donc convergente.

c. L'idée est la suivante :

Comme la suite est majorée, alors la suite des $\ln(\alpha_n^2+1)$ est majorée elle aussi. Donc $\frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{n}$ tend vers 0.

Détaillons ce calcul :

Comme $0\leq\alpha_n<1$, on a : $\alpha_n^2+1<2$.

Puisque ln est strictement croissante, cela implique : $\ln(\alpha_n^2+1)<\ln(2)$

Par conséquent, on a pour tout n : $0\leq\frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{n}\leq\frac{\ln(2)}{n}$.

D'après le théorème des gendarmes (rédaction à compléter), on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(\alpha_n^2+1)=0$.

Or, $2\alpha_n-2+\frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{n}=0$, donc $\alpha_n=1-\frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$.

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}=1-0=1$.