Corrigé du devoir surveillé nº5

Exercice 1 :

1.

a) Posons $u(x)=\frac{1}{x}$. Alors $f(x)=\mathrm{e}^{u(x)}$. On sait alors (cours) que $f'(x)=u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

On a donc : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty\end{array}\right\}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^x=1\end{array}\right\}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$

2.

a) Posons $u(x)=\mathrm{e}^x+1$. Alors $g(x)=\ln(u(x))$. On sait alors (cours) que $g'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

On a donc : $g'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

b) Méthode 1 :
g' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc g est strictement croissante.
De plus, g est continue, puisqu'elle est dérivable.
On a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x+1=1 \\ \lim\limits_{x\to+1}\ln(x)=0 \text{ car ln est continue en } 1\end{array}\right\}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\mathrm{e}^x+1)=0$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x+1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\end{array}\right\}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\mathrm{e}^x+1)=+\infty$

Les limites de g aux bornes de son ensemble de définition sont donc 0 et +∞.
Par conséquent, d'après le théorème de la bijection, pour tout $k\in\left]0\,;+\infty\right[$, l'équation $g(x)=k$ a une solution unique sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 :
On résout en appliquant les propriétés bien connues du logarithme :
$\ln(\mathrm{e}^x+1)=k\Leftrightarrow\ln(\mathrm{e}^x+1)=\ln(\mathrm{e}^k)\Leftrightarrow\mathrm{e}^x+1=\mathrm{e}^k\Leftrightarrow\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^k-1\Leftrightarrow x=\ln(\mathrm{e}^k-1)$.
La solution existe car lorsque $k>0$, $\mathrm{e}^k>1$, donc $\mathrm{e}^k-1>0$, donc $\ln(\mathrm{e}^k-1)$ existe.

Exercice 2 :

1. **Calcul de $P(A)$:**
Méthode 1 :
On considère l'univers formé de suites de 4 bulletins.
Les choix sont équiprobables, car les bulletins sont indiscernables au toucher. On peut donc appliquer la formule : $P(A)=\frac{\text{nombre de cas favorables pour } A}{\text{nombre de cas possibles}}$.
Nombre de cas possibles :

Il y a 10 possibilités pour le premier bulletin, 9 pour le second (puisqu'on ne remet pas le premier dans l'urne), 8 pour le troisième et 7 pour le dernier.
Donc le nombre de cas possibles est : $10\times9\times8\times7$.
Nombre de cas favorables :
Il y a 4 possibilités pour le premier bulletin (une des 4 questions d'histoire), 3 possibilités pour le deuxième, etc.
Le nombre de cas favorables est donc : $4\times3\times2\times1$.

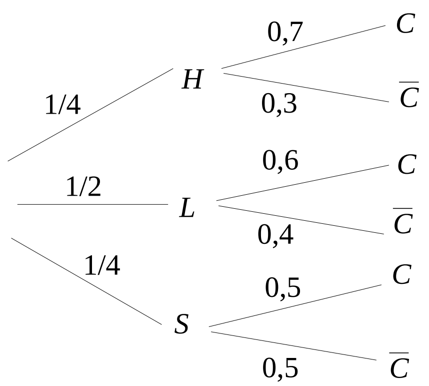
Ainsi, on obtient : $\boxed{P(A)=\dfrac{4\times3\times2\times1}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{24}{5040}=\dfrac{1}{210}}$.

Méthode 2 :
On considère cette fois l'univers formé des « paquets » de 4 bulletins, c'est à dire qu'on ne tient pas compte de l'ordre.
Comme les tirages sont simultanés, tous les paquets de 4 bulletins ont la même probabilité d'être choisis : il y a encore équiprobabilité.
On applique donc la formule $P(A)=\dfrac{\text{nombre de cas favorables pour } A}{\text{nombre de cas possibles}}$.
Ici, le nombre de cas possibles est le nombre de paquets de 4 bulletins pris parmi les 10. On sait que ce nombre est $\binom{10}{4}=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$.
Le nombre de cas favorables est 1, car il n'y a qu'un paquet regroupant les 4 bulletins « histoire ».
Donc : $P(A)=\dfrac{1}{\binom{10}{4}}=\dfrac{1}{210}$.

Calcul de $P(B)$:
L'événement contraire de B est $\overline{B}$: « Aucune question ne porte sur le sport ».
On doit donc comme précédemment choisir 4 bulletins parmi les 10 ; et on compte l'issue comme cas favorables lorsque les 4 sont choisis parmi les 8 questions qui ne portent pas sur le sport.
Comme précédemment, on obtient :
$P(\overline{B})=\dfrac{8\times7\times6\times5}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{1}{3}$
Par conséquent : $P(B)=1-P(\overline{B})=\dfrac{2}{3}$.

2.

a) L'arbre ressemble à ceci :



b) On applique le principe des probabilités totales :
$P(C)=+P(H\cap C)+P(L\cap C)+P(S\cap C)$
$P(C)=\dfrac{1}{4}\times0{,}7+\dfrac{1}{2}\times0{,}6+\dfrac{1}{4}\times0{,}5=0{,}175+0{,}3+0{,}125$

$\boxed{P(C)=0{,}6}$.

c) On cherche $P_C(S)$. La question est mal posée, mais c'est habituel dans les sujets de bac.

$P_C(S)=\dfrac{P(S\cap C)}{P(C)}=\dfrac{0{,}125}{0{,}6}$

$\boxed{P_C(S)\simeq 0{,}208}$

3. L'expérience consistant à répondre à une question est une épreuve de Bernoulli, car elle a deux issues : la réponse est bonne ou elle ne l'est pas.
Convenons d'appeler « succès » une bonne réponse. La probabilité d'un succès est 0,7 d'après l'énoncé.
On répète 10 fois de façon indépendante cette épreuve de Bernoulli. On obtient donc un schéma de Bernoulli.
On sait alors que la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès parmi les 10 résultats suit une loi binomiale de paramètres n = 10 et p = 0,7.

a) On en déduit (c'est du cours) que : $\boxed{P(X=k)=\binom{10}{k}\cdot 0{,}7^k\cdot 0{,}3^{10-k}}$.

b) Soit E l'événement : « Le candidat donne au moins 9 bonnes réponses ». On voit que E se définit aussi par : « Le candidat donne 9 ou 10 bonnes réponses ».
Autrement dit : $P(E)=P(X=9 \text{ ou } X=10)$.
Comme $X=9$ et $X=10$ sont des événements incompatibles, on a :
$P(E)=P(X=9)+P(X=10)$

On calcule ces deux probabilités grâce à la question précédente :

$P(X=9)=\binom{10}{9}\cdot 0{,}7^9\cdot 0{,}3^1=10\times 0{,}7^9\times 0{,}3=3\times 0{,}7^9\simeq 0{,}121$

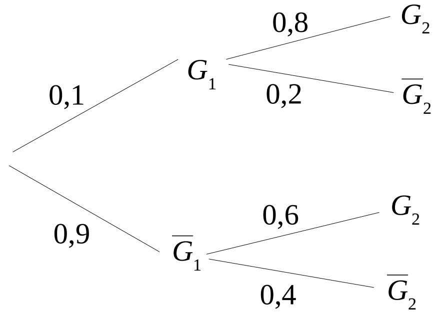
$P(X=10)=\binom{10}{10}\cdot 0{,}7^{10}\cdot 0{,}3^0=1\times 0{,}7^{10}\simeq 0{,}028$

Conclusion : $\boxed{P(E)\simeq 0{,}15}$ (arrondi à 10^{-2}).

c) On sait d'après le cours que si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors l'espérance de X est $E(X) = np$.
Ici, n=10 et p=0,7 donc $\boxed{E(X)=7}$.

Exercice 3 :

1. Hop, un arbre :

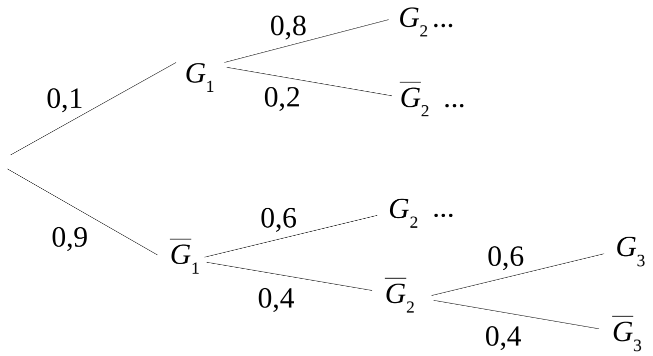


On applique la formule des probabilités totales.
On a : $p_2=P(G_2)=P(G_1\cap G_2)+P(\overline{G_1}\cap G_2)$.
Donc : $p_2=0{,}1\times 0{,}8+0{,}9\times 0{,}6=0{,}08+0{,}54$ soit $\boxed{p_2=0{,}62}$.

2. Comme d'habitude, la question est mal posée, mais on comprend qu'il faut calculer $P_{G_2}(\overline{G_1})$.

On a : $\boxed{P_{G_2}(\overline{G_1}) = \dfrac{P(\overline{G_1} \cap G_2)}{G_2} = \dfrac{0{,}54}{0{,}62} \simeq 0{,}87}$.

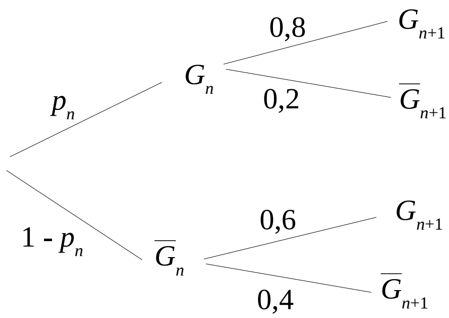
3. Soit A : « Le joueur a gagné au moins une partie sur les 3 premières ».
Alors $\overline{A}$: « Le joueur n'a gagné aucune partie parmi les 3 premières ».
La situation est la suivante (on n'a pas dessiné l'arbre en entier) :



Donc $P(\overline{A}) = P(\overline{G_1}, \overline{G_2}, \overline{G_3}) = 0{,}9 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}144$.

Donc $\boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}856}$.

4. Encore un arbre :



On applique la formule des probabilités totales :
$P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G_n}) \times P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$.

On a posé : $P(G_n) = p_n$, donc $P(\overline{G_n}) = 1 - p_n$.
On obtient donc : $p_{n+1} = P(G_{n+1}) = p_n \times 0{,}8 + (1 - p_n) \times 0{,}6$ d'où : $p_{n+1} = p_n(0{,}8 - 0{,}6) + 0{,}6 = 0{,}2\, p_n + 0{,}6$.
Ceci peut encore s'écrire : $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} p_n + \dfrac{3}{5}$.

5. Posons : $\mathscr{P}(n)$: $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

Initialisation :

$\mathscr{P}(1)$ est vraie car $\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{15}{20} - \dfrac{13}{20} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$. On a donc bien $p_1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1$.

Hérédité :

Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

On a : $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} p_n + \dfrac{3}{5}$, d'où, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n \times \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3}{20} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{12}{20} = \frac{15}{20} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $\mathscr{P}(1)$ est vraie et que $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, on peut en déduire que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n entier naturel non nul.

6. On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{5} \in]-1\,;1[$. Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{3}{4}$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{4}$.

7. On résout l'inéquation :

$$\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \Leftrightarrow \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^n < \frac{4}{13} \times 10^{-7} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^n < \frac{4}{13} \times 10^{-7} \Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] < \ln\left[\frac{4}{13} \times 10^{-7}\right]$$

$$\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{5}\right) < \ln\left(\frac{4}{13} \times 10^{-7}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{4}{13} \times 10^{-7}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{4}{13} \times 10^{-7}\right)}{-\ln(5)}$$

On trouve : $n > 10{,}747 \ldots$.

On voit donc que $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ pour $\boxed{n \geq 11}$.

Voilà...