MATHÉMATIQUES - Devoir surveillé nº5

Exercice 1 : (5 points)

1. Soit la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in\ ]0\ ;+\infty[$.

b) Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\ln(\mathrm{e}^{x}+1)$.

a) Calculer $g'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

b) Démontrer que pour tout $k \in\ ]0\ ;+\infty[$, l'équation $g(x)=k$ a une solution unique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : (8 points)

Les trois questions peuvent être traitées de façon indépendante .

Un candidat participe à un jeu télévisé qui comporte deux épreuves. La première consiste à répondre à une question tirée au hasard parmi celles que l'assistante a prélevées dans une urne.

Dans la seconde, il doit répondre à une série de 10 questions sur un thème qu'il choisit.

1. L'urne contient dix bulletins indiscernables au toucher comportant chacun une question. Toutes les questions sont différentes, quatre portent sur l'histoire, quatre portent sur la littérature et deux sur le sport.
En début d'émission, l'assistante tire au hasard et simultanément 4 bulletins de l'urne.
On note A l'événement « les quatre questions portent sur l'histoire » et B l'événement « l'une au moins des quatre questions porte sur le sport ».

Déterminer la probabilité des événements A et B.

2. L'animateur annonce les thèmes sur lesquels portent les questions des quatre bulletins choisis par l'assistante. Il y a une question d'histoire, deux de littérature et une sur le sport.
Le candidat tire au hasard l'un de ces quatre bulletins.
On admet que la probabilité que sa réponse soit correcte est 0,7 s'il s'agit d'une question d'histoire, 0,6 s'il s'agit d'une question de littérature et 0,5 pour une question sur le sport.
On considère les événements suivants :
H : « la question posée au candidat porte sur l'histoire »
L : « la question posée au candidat porte sur la littérature »
S : « la question posée au candidat porte sur le sport »
C : « le candidat répond correctement à la question posée »

a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à cette première épreuve.

b) Calculer la probabilité de l'événement C.

c) Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité que la question posée ait porté sur le sport ?

3. Le candidat a réussi cette première épreuve et choisit l'histoire comme thème pour la seconde épreuve. Les dix questions qu'on lui pose sont indépendantes et on suppose toujours que la probabilité qu'il réponde correctement à chaque question est égale à 0, 7.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonnes réponses données par le candidat.

a) Soit k un entier compris entre 0 et 10.
Quelle est l'expression de la probabilité de l'événement $\{X = k\}$ en fonction de k ? On justifiera la réponse.

b) Déterminer la probabilité que le candidat donne au moins neuf bonnes réponses. On arrondira le résultat à 10^{-2}.

c) Calculer l'espérance de X.

Exercice 3 : (7 points)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'événement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'événement G_n ·

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite p_n quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4}-p_n<10^{-7}$?