

Mathématiques - Devoir surveillé n° 9

Exercice 1 (10 points)

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. Déterminer λ , arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. À quel instant t , à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans?
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Exercice 2 (10 points)

Une machine fabrique en grande série des pièces d'acier. Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce prise au hasard dans la production hebdomadaire, associe sa longueur, exprimée en cm. On admet que X suit la loi normale $\mathcal{N}(15; 0,07^2)$. Une pièce est déclarée défectueuse si sa longueur est inférieure à 14,9 cm ou supérieure à 15,2 cm.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la production hebdomadaire soit défectueuse?
2. Déterminer le nombre réel positif a tel que $p(15 - a \leq X \leq 15 + a) = 0,95$.
Après un dysfonctionnement, la machine est dérégulée. On fait l'hypothèse que la probabilité que la pièce soit défectueuse est à présent de 0,2.
On souhaite tester cette hypothèse; pour cela, on prélève un échantillon de 100 pièces au hasard (on suppose que le stock est assez grand pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.) Le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon est de 15.
3. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% de la fréquence de pièces défectueuses.
4. Peut-on affirmer qu'au risque de 5%, la fréquence observée est en accord avec l'hypothèse? (Vérifier que les conditions d'application de la règle de prise de décision sont remplies.)
5. Reprendre les questions 3 et 4 lorsque l'échantillon contient 1000 pièces dont 150 sont défectueuses.