Corrigé du devoir surveillé nº9

Exercice 1 :

1. Le calcul habituel :
$p(X>6)=1-p(X\leq 6)=1-\int_0^6 \lambda e^{-\lambda x}\,dx=1-\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^6=1-\left(-e^{-6\lambda}+e^0\right)=1+e^{-6\lambda}-1=e^{-6\lambda}$
On a donc : $e^{-6\lambda}=0{,}3 \Leftrightarrow \ln\left(e^{-6\lambda}\right)=\ln(0{,}3)\Leftrightarrow -6\lambda=\ln(0{,}3)\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{\ln(0{,}3)}{-6}$. On trouve $\boxed{\lambda\simeq 0{,}2}$.

2. La question est très mal posée mais on peut traduire ainsi :
à quel instant t a-t-on $p(X\geq t)=0{,}5$?
On a de la même manière que pour la question 1 :
$p(X\geq t)=1-p(X\leq t)=1-\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx=1-\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t=1-\left(-e^{-\lambda t}+e^0\right)=1+e^{-\lambda t}-1=e^{-\lambda t}=e^{-0{,}2t}$
On résout : $e^{-0{,}2t}=0{,}5\Leftrightarrow -0{,}2t=\ln(0{,}5)\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln(0{,}5)}{-0{,}2}$.
On trouve $t\simeq 3{,}466$, ce qui correspond à **3 ans et 6 mois** environ.

Remarque : cette valeur correspond à la médiane de X : il y a « autant de chances » que le robot tombe en panne avant 3 ans 6 mois qu'après cette date.

3. On cherche $p(X\geq 2)$. Par le même calcul que précédemment, on trouve : $p(X\geq 2)=e^{-0{,}2\times 2}=e^{-0{,}4}$.

4. On cherche $p_{X\geq 2}(X\geq 6)$.
On peut faire le calcul directement :
$p_{X\geq 2}(X\geq 6)=\dfrac{p(X\geq 2 \text{ et } X\geq 6)}{p(X\geq 2)}=\dfrac{p(X\geq 6)}{p(X\geq 2)}=\dfrac{e^{-0{,}2\times 6}}{e^{-0{,}2\times 2}}=e^{-0{,}2\times 6-(-0{,}2\times 2)}=e^{-0{,}8}$.
On peut aussi utiliser la propriété bien connue : la loi exponentielle est « sans mémoire » ou « sans vieillissement ».
Ainsi : $p_{X\geq 2}(X\geq 6)=p_{X\geq 2}(X\geq 2+4)=p(X\geq 4)=e^{-0{,}2\times 4}=e^{-0{,}8}$.

On trouve donc : $\boxed{p_{X\geq 2}(X\geq 6)=e^{-0{,}8}\simeq 0{,}45}$.

5. Les robots fonctionnant de manière indépendante, l'événement « le robot n°i est tombé en panne au cours des deux premières années » est indépendant de l'événement « le robot n°j est tombé en panne au cours des deux premières années » lorsque $i\neq j$.
Par conséquent, notant P_i l'événement « le robot n°i est tombé en panne au cours des deux premières années », on a : $p(P_1;P_2;P_3;...;P_{10})=p(P_1)\times p(P_2)\times ...\times p(P_{10})$.
D'après la question 3, $p(P_1)=p(P_2)=...=p(P_{10})=1-e^{-0{,}4}$.
Donc $p(P_1;P_2;P_3;...;P_{10})=(1-e^{-0{,}4})^{10}$.

L'événement A : « au moins un des 10 robots n'a pas eu de panne » est le contraire de l'événement « tous les robots ont eu une panne ».
Donc $p(A)=1-p(P_1;P_2;...;P_{10})=1-(1-e^{-0{,}4})^{10}\simeq 0{,}999984832\simeq 1$.

Donc l'événement A est quasi certain...

Pour répondre à cette question, on peut aussi utiliser la loi binomiale.
On considère l'expérience consistant à choisir un robot et à noter « succès » si le robot n'a pas eu de panne durant les deux premières années. C'est une épreuve de Bernoulli (il n'y a que deux issues) et la probabilité d'un succès est $p=e^{-0{,}4}$.

On répète cette expérience 10 fois (on choisit 10 robots). Comme leur fonctionnement est indépendant, on obtient un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès parmi les 10 résultats suit, c'est bien connu, une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\mathrm{e}^{-0,4}$.

L'événement A défini ci-dessus vérifie :
$p(A)=p(Y\geq 1)=1-p(Y=0)=1-\binom{10}{0}\times\left(\mathrm{e}^{-0,4}\right)^{0}\times\left(1-\mathrm{e}^{-0,4}\right)^{10}=1-(1-\mathrm{e}^{-0,4})^{10}$.

Exercice 2 :

J'avais oublié le carré dans les paramètres de la loi normale.
Il fallait donc comprendre : X suit la loi normale $\mathcal{N}(15\ ;\ 0{,}07^2)$.

1. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est $p(X<14{,}9 \text{ ou } X>15{,}2)=1-p(14{,}9\leq X\leq 15{,}2)$.
   La calculatrice donne comme résultat : **0,079** environ.
2. C'est du cours (page 4.)
   On sait que lorsque X suit la loi $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$, $p(X\in[\mu-1{,}96\sigma\,;\mu+1{,}96\sigma])\simeq 0{,}95$.
   Ici, on a donc : $a=1{,}96\sigma=1{,}96\times 0{,}07\simeq 0{,}137$
3. On applique la formule sans états d'âme...
   $I=\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\,;p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\right]$ avec ici : $p=0{,}2$ et $n=100$.
   On obtient : $\boxed{I=[0{,}122\,;0{,}278]}$ (à 10^{-3} près).
4. Les conditions de la prise de décisions sont vérifiées car :
   $n=100\geqslant 30$; $np=20\geqslant 5$; $n(1-p)=80\geqslant 5$.

   Or, la fréquence observée dans l'échantillon est : $f=\frac{15}{100}=0{,}15$.
   Comme f appartient à I, **on accepte l'hypothèse**.
5. On applique la formule avec $p=0{,}2$, et cette fois $n=1000$.
   On trouve : $I=[0{,}175\,;0{,}225]$.

   Les conditions d'application sont remplies, bien sûr, puisque n est encore plus grand.

   La fréquence observée dans l'échantillon est : $f=\frac{150}{1000}=0{,}15$.
   Cette fois, f n'appartient pas à I, donc on considère que la fréquence observée est **en désaccord** avec l'hypothèse, au risque de 5 % de se tromper.

Voilà.