Lois à densité - Exercices

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $[2\,;10]$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{16}x - \dfrac{1}{8} \text{ pour } 2 \leq x \leq 6 \\ f(x) = -\dfrac{1}{16}x + \dfrac{5}{8} \text{ pour } 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$

1. Représenter f et démontrer que f est une densité de probabilité.
2. La v.a. X suit la loi de densité f. Calculer $P(3 \leq X \leq 7)$.

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[2\,;10]$.

1. Calculer $P(3 \leq X \leq 7)$.
2. Calculer $P_{X \geq 3}(X \leq 5)$.
3. Déterminer θ tel que $P(X > \theta) = 0{,}8$.
4. Calculer $E(X)$.

Exercice 3 :

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

1. Calculer $P(3 \leq X \leq 7)$.
2. Calculer $P_{X \geq 3}(X \leq 5)$.
3. Déterminer θ tel que $P(X > \theta) = 0{,}8$.
4. Déterminer T tel que $P(X \leq T) = \dfrac{1}{2}$.
5. Calculer $E(X)$.

Exercice 4 (Antilles-Guyane, juin 2015) :

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

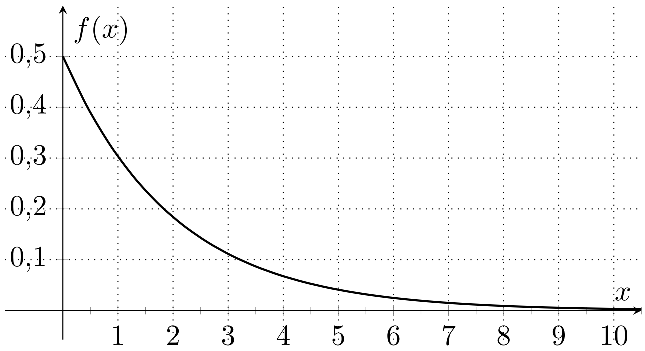
$$\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right).$$

2. En déduire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

La courbe de la fonction densité associée est représentée ci-dessous.



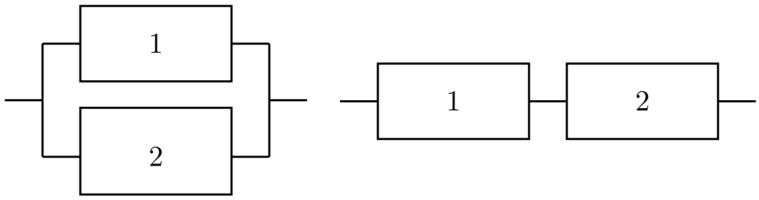
1. Sur le graphique :
   a) Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
   b) Indiquer où se lit directement la valeur de λ.
2. On suppose que $E(X) = 2$.
   a) Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
   b) Calculer la valeur de λ.
   c) Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près.
   Interpréter ce résultat.
   d) Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0{,}39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Exercice 5 (Métropole, juin 2015) :

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.
   On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
   $$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$
   a) Soit c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
   Démontrer que la probabilité $P(c \leqslant X \leqslant d)$ vérifie $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
   b) Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.
   c) Donner l'espérance de la variable aléatoire X

   Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0{,}15$.

   d) Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.
   e) Calculer la probabilité de l'évènement $(X > 18)$.
2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.
   a) Calculer la probabilité de l'évènement $(20 \leqslant Y \leqslant 21)$.
   b) Calculer la probabilité de l'évènement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

Exercice 6 (Amérique du Nord, mai 2013) :

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.
2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Exercice 7 (Pondichéry, avril 2014) :

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif. On sait que $P(X \leqslant 2) = 0{,}15$.
   Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ.

2. a) Déterminer $P(X \geqslant 3)$.
   b) Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$.

c) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

Exercice 8 (Métropole, septembre 2014) :

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.
3. Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

Exercice 9 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte, bla bla bla.

1. La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t > 0$: $P(T < t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ où t désigne le temps exprimé en minutes.
   Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total soit inférieur à 5 minutes ?

   a. 0,2819 **b.** 0,3935 **c.** 0,5654 **d.** 0,6065

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$.
   On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'événement $(X \leqslant t)$, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
   La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

   a. 0,91 **b.** 0,18 **c.** 0,19 **d.** 0,82

3. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
   La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10000 heures est, au millième près :

   a. 0,271 **b.** 0,135 **c.** 0,865 **d.** 0,729

4. Un hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \dfrac{1}{8}$.
   La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

   a. 0,750 **b.** 0,250 **c.** 0,472 **d.** 0,528