Corrigé du baccalauréat S (obligatoire) Polynésie septembre 2010

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. **Proposition 1** : Vraie

   Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$, donc

   $t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

   En écrivant cette égalité pour $n = 0,\ 1,\ n$, on obtient :

   $t_1 = 0 + \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}$

   $t_2 = t_1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$

   $\ldots = \ldots\ldots$

   $t_n = t_{n-1} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, soit par somme membres à membres et simplifications :

   $t_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

2. **Proposition 2** : Vraie

   Les suites (u_n)et (v_n) sont adjacentes : elles convergent et ont la même limite ℓ.

   Comme $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$, d'après le théorème des « gendarmes », la suite (w_n) converge vers la même limite ℓ.

3. **Proposition 3** : Fausse

   Il suffit de prendre f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x$ et g définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = 1 - x$. Les intégrales sont égales à $\dfrac{1}{2}$ (aires de triangles rectangles isocèles) et les fonctions ne sont pas égales.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Pour un point M d'affixe z et son image M' par h d'affixe z', la traduction complexe de l'égalité $\overrightarrow{\text{S}M'} = 3\overrightarrow{\text{S}M}$ est :

   $z' - (-5+5\text{i}) = 3[z - (-5+5\text{i})] \iff z' = -5+5\text{i}+3z+15-15\text{i} \iff z' = 3z+10-10\text{i}$.

   b. On a $\text{C} = h(\text{A})$, donc $c = 3(-2+4\text{i}) + 10 - 10\text{i} = 4+2\text{i}$.

   De même $\text{D} = h(\text{B})$ donc $d = 3(-4+2\text{i}+10-10\text{i} = -2-4\text{i}$.

2. On a : $|a|^2 = 4+16 = 20$, $|b|^2 = 16+4 = 20$, $|c|^2 = 16+4 = 20$ et $|d|^2 = 4+16 = 20$, d'où $|a| = \text{OA} = |b| = \text{OB} = |c| = \text{OC} = |d| = \text{OD} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

   Les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{5}$.

3. Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $(-3 ; 3)$.

   $M(x ; y)$ appartient à la médiatrice de [AB] si et seulement si $(M\text{I}) \perp (\text{AB}) \iff \overrightarrow{M\text{I}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 0 \iff -2(-3-x) - 2(3-y) = 0 \iff -3-x+3-y = 0 \iff x+y = 0$

   $\text{S}(-5 ; 5)$ appartient à cette médiatrice ;

   $\Omega(-2 ; 2)$ appartient à cette médiatrice.

   Conclusion : $(\text{S}\Omega)$ est la médiatrice de [AB].

4. **a.** On a $p = \frac{1}{2}(-2+4\mathrm{i}+4+2\mathrm{i}) = 1+3\mathrm{i}$.

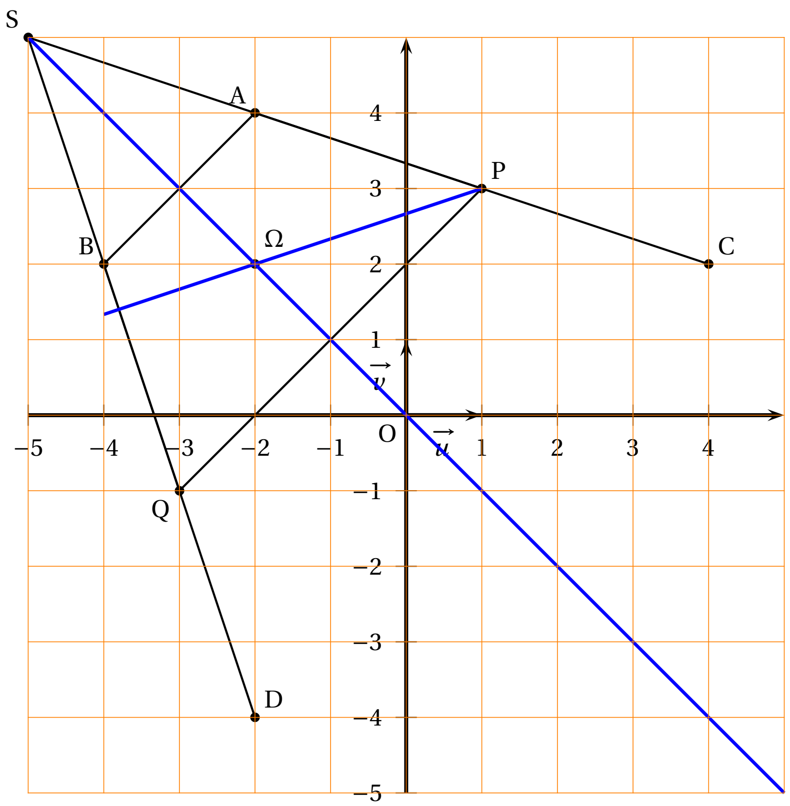
b. $\frac{\omega - p}{d-b} = \frac{-2+2\mathrm{i}-1-3\mathrm{i}}{-2-4\mathrm{i}+4-2\mathrm{i}} = \frac{-3-\mathrm{i}}{2-6\mathrm{i}} = \frac{(-3-\mathrm{i})(2+6\mathrm{i})}{(2-6\mathrm{i})(2+6\mathrm{i})} = \frac{-6+6-18\mathrm{i}-2\mathrm{i}}{4+36} = \frac{-20\mathrm{i}}{40} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

En terme d'argument la relation précédente signifie que :
$\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}}, \overrightarrow{\mathrm{P\Omega}}\right) = -\frac{\pi}{2}$. Conclusion : la droite (PΩ) est perpendiculaire à la droite (BD).

5. Par l'homothétie h l'image (CD) de la droite (AB) est parallèle à cette dernière : le quadrilatère ABDC est un trapéze ; dans ce trapèze la droite des « milieux » (PQ) est parallèle à (AB) et à (CD).

Or on a vu que (AB) et (SΩ) sont perpendiculaires. Donc (SΩ) est aussi perpendiculaire à (PQ).

Donc dans le triangle PQS, (SΩ) et (PΩ) sont deux hauteurs : le point Ω est l'orthocentre du triangle PQS.



EXERCICE 3 **5 points**

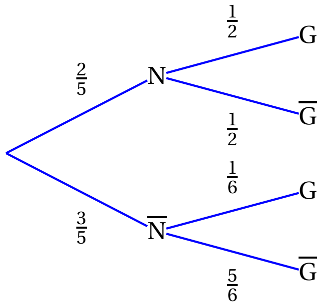
Commun à tous les candidats

1. **a.** Sortons la boule noire : il y a $\binom{9}{3}$ tirages 3 boules parmi les 9 restantes. À chacun de ces tirages on adjoint le tirage de la boule noire. Il y a donc $\binom{9}{3}$ tirages différents de quatre boules contenant la boule noire.

Le nombre de tirages possibles est $\binom{10}{4}$ tirages.

On a donc $p(\mathrm{N} = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{9!}{3!6!}}{\frac{10!}{4!6!}} = \frac{9! \times 4! \times 6!}{3! \times 6! \times 10!} = \frac{2}{5}$.

b. On a l'arbre suivant :



On a donc $p(\text{G}) = p(\text{N}) \times p_{\text{N}}(\text{G}) + p\left(\overline{\text{N}}\right) \times p_{\overline{\text{N}}}(\text{G}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{2+1}{10}\dfrac{3}{10}$.

c. D'après la question précédente la probabilité de perdre est $1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10}$.

Il faut calculer $p_{\overline{\text{G}}}(\text{N}) = \dfrac{p\left(\overline{\text{G}} \cap p(\text{N})\right)}{p(\overline{\text{G}})} = \dfrac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{10}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{10}} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{10}{7} = \dfrac{2}{7}$.

2. **a.** • Si le joueur gagne $\left(\text{probabilité de } \dfrac{3}{10}\right)$, le joueur gagne $4 - m$ euro(s) ;

• Si le joueur ne gagne pas mais a tiré la boule noire (probabilité de $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$) le joueur gagne ou perd 0 euro ;

• Si le joueur ne gagne pas et n'a pas tiré la boule noire (probabilité égale à $\frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$) le joueur a « gagné » $-m$ euro(s).

D'où le tableau de la loi de probabilité du gain X suivant :

$X = x_i$	$4 - m$	0	$-m$
$p(X = x_i)$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{2}$

b. On a $\text{E}(X) = (4 - m) \times \dfrac{3}{10} + 0 \times \dfrac{1}{5} - m \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{12 - 3m - 5m}{10} = \dfrac{12 - 8m}{10}$.

c. On a $\text{E}(X) = 0 \iff \dfrac{12 - 8m}{10} \iff 12 - 8m = 0 \iff m = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} = 1,50$ €.

3. On a une épreuve de Bernoulli de paramètres n et $p = \dfrac{3}{10}$.

La probabilité de ne jamais gagner en n jeux est égale $\left(\dfrac{7}{10}\right)^n$, donc la probabilité de gagner au moins une fois est : $1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.

Il faut donc résoudre :

$1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n > 0,999 \iff \left(\dfrac{7}{10}\right)^n < 0,001 \iff 0,7^n < 0,001 \iff$

$n \ln 0,7 < \ln 0,001$ (d'après la croissance de la fonction ln) puis $n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,7}$.

Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,7} \approx 19,3$.

Il faut donc jouer au moins 20 fois.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie 1

1. On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1-x)+1$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$, donc par produit des limites :
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2. La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ est dérivable et sur $[0~;~+\infty[$:
$g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$.
Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x > 0$, on a $g'(x) < 0$ sur $[0~;~+\infty[$.
g est donc décroissante sur $[0~;~+\infty[$ de $g(0) = 2$ à $-\infty$.

3. Donner le tableau de variations de g.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	2	$-\infty$

4. **a.** Sur $[0~;~+\infty[$, g dérivable est donc continue et décroissante, $g(0) > 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
Il existe donc un réel unique $\alpha \in [0~;~+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne :
- $g(1) = 1$ et $g(2) \approx -6,4$, donc $1 < \alpha < 2$;
- $g(1,2) \approx 0,3$ et $g(1,3) \approx -0,1$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$;
- $g(1,27) \approx 0,04$ et $g(1,28) \approx -0,007$, donc $1,27 < \alpha < 1,28$.

c. On a $g(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

5. On a donc $g(x) > 0$ sur $[0~;~\alpha[$;
$g(\alpha) = 0$;
$g(x) < 0$ sur $[\alpha~;~+\infty[$.

Partie 2

1. La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas) est dérivable et sur cet intervalle :
$A'(x) = \dfrac{4\left(\mathrm{e}^x+1\right) - 4x \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \dfrac{4\left(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \dfrac{4g(x)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$.
Comme $\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.
D'après la précédente question on a donc :
$A'(x) > 0$ sur $[0~;~\alpha[$;
$A'(\alpha) = 0$;
$A' < 0$ sur $[\alpha~;~+\infty[$.

2. On a donc :
$A(x)$ est croissante sur $[0~;~\alpha[$ et décroissante sur $[\alpha~;~+\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

Partie 3

1. On sait que $x \geqslant 0$, donc l'aire du rectangle OPMQ est égale à $x \times f(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1} = A(x)$.
Or on a vu que la fonction présente un maximum pour $x = \alpha$.

2. Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{\frac{4}{\mathrm{e}^{\alpha}+1}}{\alpha} = -\dfrac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)}$.

Or on a vu que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$, donc le coefficient directeur est égal à :

$-\dfrac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)} = -\dfrac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.

La tangente en $M(\alpha\ ;\ f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

Or $f'(x) = -\dfrac{4\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2}$, donc

$f'(\alpha) = -\dfrac{4\mathrm{e}^{\alpha}}{\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)^2} = -\dfrac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{(1+\alpha-1)^2} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.

Les coefficients directeurs sont égaux : les droites sont parallèles.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 4