Lois de probabilité à densité

1 Introduction

1.1 Exemple

Supposons une roue de loterie graduée régulièrement de 0 à 0,9 tous les $1/10^e$. Chaque secteur représente $1/10^e$ de tour complet. Il y a équiprobabilité et la probabilité de tomber, par exemple, sur 0,4 est de 0,1.

On gradue à présent la roue tous les $1/100^e$, de 0 à 0,99. Il y a encore équiprobabilité et la probabilité d'obtenir 0,4 est 0,01.

Si on gradue tous les $1/1000000^e$, de 0 à 0,999999, la probabilité de tomber sur 0,4 est de $1/1000000^e$.

Si on gradue de plus en plus finement, on voit que la probabilité d'obtenir un nombre précis tend vers 0. Par contre, la probabilité de tomber sur un nombre x tel que $0{,}4 \leq x < 0{,}5$ reste constante (elle vaut toujours 0,1).

À la limite, on obtient une variable aléatoire X qui peut prendre n'importe quelle valeur sur $[0;1]$, avec pour chacune d'elle la probabilité 0. Par contre, pour $a < b$, $P(a \leq X \leq b) \neq 0$.

1.2 Mise en forme

L'exemple précédent conduit à la définition suivante :

Définition 1

Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur l'intervalle $[r\,;s]$ si pour tout intervalle $[a\,;b] \subset [r\,;s]$:

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{b-a}{s-r}$$

Remarques :

1. On a $P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \dfrac{a-a}{s-r} = 0$. C'est conforme à l'analyse de notre exemple d'introduction.
2. On a $P(r \leq X \leq s) = \dfrac{s-r}{s-r} = 1$. C'est la propriété équivalente à celle connue pour les probabilités discrètes : la somme des probabilités des éventualités vaut 1.
3. Si $r = 0$ et $s = 1$, on obtient la loi uniforme sur $[0\,;1]$. On a alors $P(a \leq X \leq b) = b - a$.
   Beaucoup de calculatrices et de logiciels contiennent un générateur de nombres pseudo-aléatoires, qui simule le tirage d'un nombre au hasard entre 0 et 1.

1.3 Généralisation.

Dans les cas concrets courants, lorsqu'on modélise une grandeur physique par une variable aléatoire, celle-ci ne suit pas, en général, une loi uniforme. Par exemple, la probabilité que la taille d'un individu pris au hasard dans une population appartienne à un certain intervalle est plus grande lorsque celui-ci est proche de la moyenne. Il y a une probabilité plus grande que la taille (en m) appartienne à $[1{,}70\,;1{,}75]$ qu'à $[2{,}10\,;2{,}15]$.

Pour décrire ce type de variable aléatoire, les probabilistes ont introduit une nouvelle notion, celle de densité de probabilité.

2 Loi à densité

2.1 Définition

Soit I un intervalle (quelconque) de $\mathbb{R}$.

Définition 2

Une fonction f définie sur I est une **densité de probabilité** si f est continue, positive, et si $\int_I f(t)\mathrm{d}t = 1$.

L'expression $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ signifie :

- $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ si $I = [a\,;b]$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ si $I = [a\,;+\infty[$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)\mathrm{d}t + \lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^y f(t)\mathrm{d}t$ si $I =]-\infty\,;+\infty[$, etc.

On peut traduire cette condition par : l'aire sous la courbe représentative de f vaut 1.

Définition 3

Soit f une densité de probabilité sur I et soit X une variable aléatoire (continue).
On dit que X suit la loi de densité f, ou que la loi de X admet pour densité f si pour tous $a,b \in I$, $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

2.2 Exemple de la loi uniforme

Propriété 1

La densité de la loi uniforme sur $[r\,;s]$ est $\dfrac{1}{s-r}$.

En effet, pour tout intervalle $[a\,;b] \subset [r\,;s]$, on a $P(a \leq X \leq b) = \dfrac{b-a}{s-r}$.

Or, $\int_a^b \dfrac{1}{s-r}\mathrm{d}t = \left[\dfrac{t}{s-r}\right]_a^b = \dfrac{b-a}{s-r}$.

2.3 Espérance mathématique

Par analogie avec le cas discret, on a la définition suivante (avec la convention d'écriture de la définition 2) :

Définition 4

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité admet la densité f sur I.
Alors l'espérance de X est : $E(X) = \int_I tf(t)\mathrm{d}t$.

Application :

Si X suit la loi uniforme sur $[r\,;s]$, on a :

$$E(X) = \int_r^s \frac{t}{s-r}\mathrm{d}t = \frac{1}{s-r}\left[\frac{t^2}{2}\right]_s^r = \frac{1}{r-s} \times \frac{s^2-r^2}{2} = \frac{(s-r)(s+r)}{2(s-r)} = \frac{s+r}{2}$$

Propriété 2

L'espérance d'une v.a. suivant la loi uniforme sur $[r\,;s]$ est $\dfrac{r+s}{2}$.

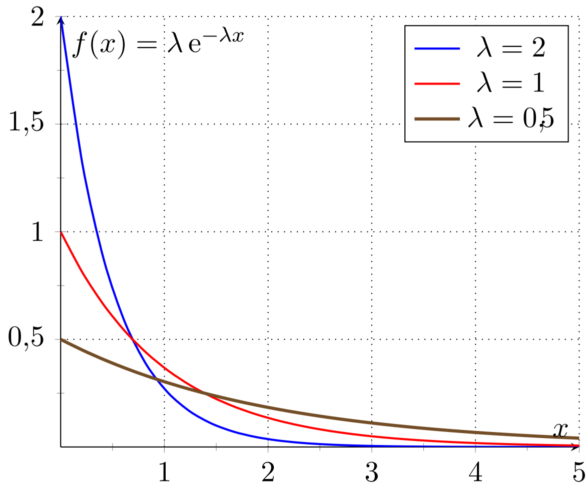
3 Lois exponentielles

3.1 Définition et exemples

Définition 5

Soit λ un réel strictement positif.
On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi de probabilité définie sur $[0\,;+\infty[$ admettant pour densité la fonction f : $f(t)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Exemples :



Remarques :

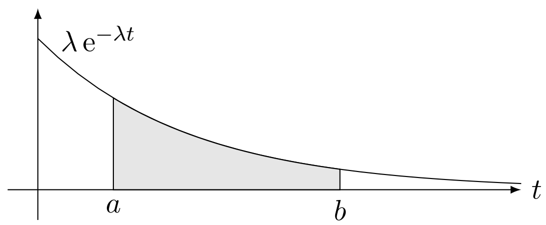
1. Dire que la v.a. X suit la loi exponentielle de paramètre λ signifie que pour $a,b\in[0\,;+\infty[$:

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

Posons $u(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$, on a : $u'(t)=-\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Donc :

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\int_a^b -u'(t)\mathrm{d}t=[-u(t)]_a^b=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_a^b=\mathrm{e}^{-\lambda a}-\mathrm{e}^{-\lambda b}$$

Cette probabilité est représentée par l'aire grisée ci-dessous.



2. Compte tenu des conventions de la définition 2, on a $\displaystyle\int_I \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=1$.

Vérifions. D'après la remarque précédente, on a :

$$\int_0^x \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\lambda 0}-\mathrm{e}^{-\lambda\times x}=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Comme $\lambda>0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}-\lambda x=-\infty$ et d'autre part, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$.

Par composition des limites, on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}=0$.

Par conséquent, on a bien : $\displaystyle\int_I \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=1$.

3.2 Espérance

Propriété 3

L'espérance d'une v.a. suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration : Il faut calculer : $\displaystyle\int_I t\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

Posons $g(t) = -t\,\mathrm{e}^{-\lambda t} - \dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$. On a alors : $g'(t) = -\,\mathrm{e}^{-\lambda t} - t\times(-\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda t} - \dfrac{1}{\lambda}\times(-\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda t} = -\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + t\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + \mathrm{e}^{-\lambda t} = t\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Par conséquent :

$$\int_0^x t\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x g'(t)\mathrm{d}t = [g(t)]_0^x = -x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x} + 0\times\mathrm{e}^{-\lambda\times 0} + \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda\times 0} = -x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$$

On a vu précédemment que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$.
D'autre part : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\lambda x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x} = 0$, donc par composition : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$.
Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$
On obtient donc : $\displaystyle\int_I t\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$ ■

3.3 Propriété : durée de vie sans vieillissement

Théorème 1

Si la v.a. X suit une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs x et h, on a :

$$P_{X\geq x}(X \geq x+h) = P(X \geq h)$$

Démonstration :

$$P(X\geq h) = 1 - P(X<h) = 1 - \int_0^h \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left[-\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^h = 1 + \mathrm{e}^{-\lambda h} - \mathrm{e}^{-\lambda\times 0} = \mathrm{e}^{-\lambda h}$$

On calcule de la même façon : $P(X\geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$ et $P(X\geq x+h) = \mathrm{e}^{-\lambda(x+h)} = \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{e}^{-\lambda h}$.
Donc : $P_{X\geq x}(X\geq x+h) = \dfrac{P(X\geq x \cap X\geq x+h)}{P(X\geq x)} = \dfrac{P(X\geq x+h)}{P(X\geq x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{e}^{-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} = \mathrm{e}^{-\lambda h}$.
Donc on a bien : $P_{X\geq x}(X\geq x+h) = P(X\geq h)$. ■

Interprétation : Comme le signale l'article de wikipedia consacré à la loi exponentielle : « Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure : la probabilité que le phénomène dure au moins $x+h$ heures sachant qu'il a déjà duré x heures est égale à la probabilité que le phénomène dure au moins h heures à partir de sa mise en fonction initiale. »

Autrement dit, appelons X la v.a. qui modélise la durée de vie d'un appareil, en heures. $P(X\geq x)$ est la probabilité que la durée de vie soit au moins de x heures, c'est à dire que l'appareil fonctionne encore après x heures.

Alors $P_{X\geq x}(X \geq x+h)$ est la probabilité que l'appareil fonctionne encore après $x+h$ heures sachant qu'il fonctionne encore après x heures.

La propriété précédente signifie donc que la probabilité que l'appareil fonctionne encore h heures de plus sachant qu'il a déjà fonctionné x heures est indépendante de x : il n'y a pas de vieillissement.

Une autre interprétation se rapporte à la radioactivité : la probabilité qu'un noyau se désintègre entre les temps x et $x+h$ est indépendante de x.