Limites de suites

Étudier la limite d'une suite (u_n), c'est se poser la question : que peut-on dire de u_n lorsque n devient de plus en plus grand, infiniment grand ? Comme on l'a vu en première, il se peut que u_n devienne lui aussi infiniment grand, ou infiniment petit (au sens : infiniment grand, mais négatif), il se peut aussi que u_n devienne infiniment proche d'une valeur finie. Il se peut aussi que rien de tout cela n'arrive, autrement dit que u_n ne « tende vers » rien.

I] Définitions

Définition 1 :

On dit que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$, et on note $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ pour signifier ceci : Quel que soit le nombre A (même très grand), tous les termes u_n sont supérieurs à A à partir d'un certain rang.

Ainsi, tous les termes de la suites sont supérieurs à 1000 à partir d'un certain rang.
Tous les termes sont supérieurs à 1 000 000 à partir d'un certain rang, etc.

Autrement dit : les u_n sont tous aussi grands qu'on veut à condition de choisir n assez grand.

Remarque 1 : on dit aussi : « u_n tend vers $+\infty$ » pour dire « (u_n) a pour limite $+\infty$ ».

Définition 2 :

On dit que la limite de la suite (u_n) est $-\infty$, et on note $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ pour signifier ceci : Quel que soit le nombre A (même très petit), tous les termes u_n sont inférieurs à A à partir d'un certain rang.

Ainsi, tous les termes de la suites sont inférieurs à –1000 à partir d'un certain rang.
Tous les termes sont inférieurs à –1 000 000 à partir d'un certain rang, etc.

Autrement dit : les u_n sont tous aussi petits (négatifs) qu'on veut à condition de choisir n assez grand.

Remarque 2 : une définition équivalente est : $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ lorsque $\lim_{n \to +\infty} (-u_n) = +\infty$

Définition 3 :

Soit a un nombre. On dit que que la limite de la suite (u_n) est a et on note $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$ pour signifier ceci : quelle que soit la distance r strictement positive (mais aussi petite qu'on veut), tous les termes u_n appartiennent à l'intervalle $]a - r \,;\, a + r[$ à partir d'un certain rang.

Ainsi, tous les termes de la suite sont situés dans $]a - 0{,}001 \,;\, a + 0{,}001[$ à partir d'un certain rang.
Tous les termes sont dans $]a - 0{,}000\,001 \,;\, a + 0{,}000\,001[$ à partir d'un certain rang, etc.

Autrement dit : les u_n sont tous aussi près que l'on veut de a à condition de choisir n assez grand.

Définition 4 :

On dit qu'une suite est **convergente**, si elle a une limite **finie** a. On dit aussi qu'elle converge vers a.

Une suite **divergente** est une suite qui n'est pas convergente.

Donc, une suite est divergente dans deux cas :

- soit elle a une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$),
- soit elle n'a pas de limite du tout.

Quelques exemples :

1. $u_n = 3n$. $3n$ devient aussi grand qu'on veut, à condition de choisir n assez grand.
   Donc $\lim_{n \to +\infty} 3n = +\infty$.

2. $u_n = \frac{1}{n}$. $\frac{1}{n}$ devient aussi proche de 0 qu'on veut, à condition de choisir n assez grand.

   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3. $u_n = (-1)^n$. $(-1)^n$ vaut alternativement 1 ; –1 ; 1 ; –1, etc. suivant que n est pair ou impair.
   Dans ce cas, (u_n) n'a pas de limite : en effet, u_n ne prend pas de grandes valeurs, mais ne se rapproche pas non plus d'aussi près qu'on veut d'un nombre donné.

Remarque 3 : si une suite (u_n) a une limite, celle-ci est nécessairement unique. En effet, supposons que (u_n) admette comme limites deux nombres, a et b. D'après la définition, cela signifie que u_n devient aussi proche qu'on veut de a et de b à condition de choisir n suffisamment grand. Cela implique que a et b sont aussi proches qu'on veut, et donc qu'ils sont égaux.

II] Opérations et limites

Règle empirique : on effectue la même opération sur les limites que celle effectuée sur les suites sous réserve que cette opération ait un sens.

Propriété 1 :

Soient a et b deux nombres ; soient (u_n) et (v_n), deux suites.

Somme :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	a	a	a	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	b	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) =$	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Intuitivement, la somme d'un infini et d'un nombre (fini) est un infini.
L'expression « forme indéterminée » signifie : « ça dépend des cas ».

Produit :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	a	$a \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	b	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \cdot v_n) =$	ab	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	forme indéterminée

Le signe est donné par la règle des signes

Inverse :

Notation : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$ signifie $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ **et** $u_n > 0$ pour tout n à partir d'un certain rang.
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^-$ signifie $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ **et** $u_n < 0$ pour tout n à partir d'un certain rang.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	$a \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0^+	0^-	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{a}$	0	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Remarque 4 : le plus souvent, les règles données ici sont conformes à l'intuition. Le plus important est de repérer les cas qui conduisent à une forme indéterminée. En particulier, une erreur très fréquente se produit lorsqu'on cherche la limite de $\frac{1}{u_n}$ lorsque u_n a pour limite 0 (tableau précédent). Il faut toujours vérifier que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang pour pouvoir conclure.

III] Limites des suites de référence.

Propriété 2 :

On admet : $\lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} n^2 = \lim_{n\to+\infty} n^3 = \ldots = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = \ldots = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Propriété 3 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, avec $u_0 \neq 0$.

Si $-1 < q < 1$ alors (u_n) est convergente, de limite 0.
Si $q \leq -1$ ou $q > 1$ alors (u_n) est divergente.

Plus précisément : Si $q \leq -1$, (u_n) n'a pas de limite.
Si $q > 1$, alors (u_n) a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$
Si $q = 1$, alors (u_n) est constante (c'est évident). Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_o$.

IV] Théorèmes de comparaison

Théorème 1 :

Soient (u_n), (v_n) deux suites suites vérifiant les deux conditions suivantes :
- on a : $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang ;
- on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Alors on a : $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Démonstration :

Soit A un nombre réel, aussi grand qu'on veut.
Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $u_n \geqslant \mathrm{A}$ à partir d'un certain rang p.
De plus, $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang q.
Donc, si n est supérieur à p et q, on a : $v_n \geqslant u_n \geqslant \mathrm{A}$.
Conclusion : pour tout réel A, aussi grand qu'on veut, $v_n \geqslant \mathrm{A}$ à partir d'un certain rang.
Cela montre que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Fin de la démonstration.

Théorème 2 :

Soient (u_n), (v_n) deux suites suites vérifiant les deux conditions suivantes :
- on a : $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang ;
- on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Alors on a : $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Démonstration :

Il suffit d'utiliser le théorème 1 en prenant les suites opposées.

Théorème 3 (admis) :

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant les deux conditions suivantes :
- on a : $u_n \leq w_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang ;
- on a : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = a$ où a est un nombre réel.

Alors on a : $\lim_{n \to +\infty} w_n = a$.

V] Théorèmes de convergence monotone

Théorème 4 (admis) :

Toute suite croissante majorée converge.

Ce théorème est fondamental car il permet de démontrer qu'une suite converge, alors même qu'on ne connaît pas sa limite. C'est le cas en particulier quand on utilise un algorithme de dichotomie.

Le théorème 4 a pour corollaire évident le résultat suivant :

Toute suite décroissante minorée converge.

Théorème 5 :

Toute suite croissante non majorée a pour limite +?∞.

Démonstration :

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

Comme u_n n'est pas majorée, pour tout nombre B, même très grand, il existe un certain indice p tel que $u_p \geq$ A.

Comme d'autre part (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geq p$, on a $u_n \geq u_p$.

On obtient donc finalement : quelque soit le nombre B (aussi grand qu'on veut), tous les termes u_n sont supérieurs à B à partir d'un certain rang.

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Fin de la démonstration.

Remarque : D'après les théorèmes 4 et 5, une suite croissante a toujours une limite, finie ou infinie.

On peut démontrer d'autres résultats (plus ou moins facilement), par exemple :

1. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de limites respectivement a et b et si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $a \leqslant b$. (*Se démontre à partir de la définition.*)
2. Si une suite a une limite infinie, alors elle n'est bornée. Mais si une suite a une limite finie (un nombre réel), alors elle est bornée. (*Pas très difficile à démontrer.*)
3. Par contre, une suite bornée n'a pas forcément de limite. Une suite qui n'est pas bornée non plus d'ailleurs. (*Trouver des contre-exemples.*)
4. Une suite croissante qui n'est pas bornée a pour limite $+\infty$. Mais une suite qui a pour limite $+\infty$ n'est pas forcément croissante. (*Trouver des contre-exemples.*)