Correction du devoir maison n°2

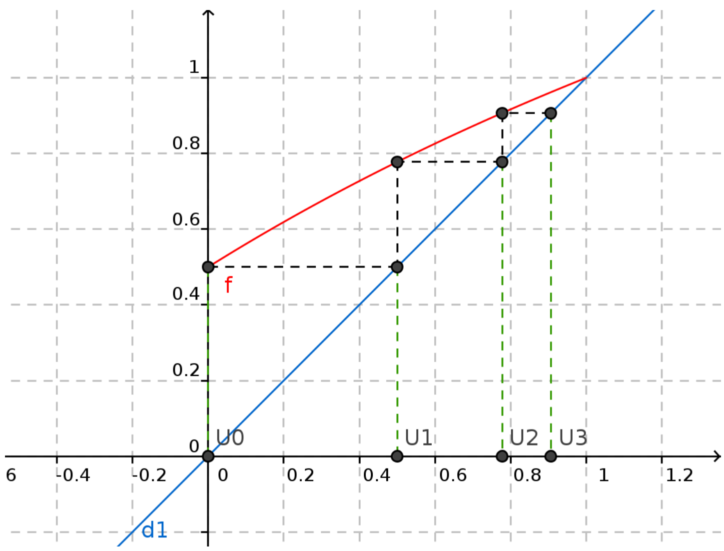
Exercice n° 21 de la feuille :

1. Bonnes réponses : la suite (u_n) est majorée et la suite (u_n) tend vers $-\infty$.
   C'est le théorème 2 du cours sur les limites de suite.
2. Bonnes réponses : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n - u_n = l$ et on ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
   En effet, comme $w_n = 2u_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2l$, et la limite l est différente de 0 puisque $u_n \geq 1$.
   Tout ce qu'on peut dire, c'est que la suite (v_n) est bornée.
3. Bonnes réponses : La suite (v_n) est majorée et on ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
   En effet, (w_n) est convergente donc majorée, et donc (v_n) aussi. Mais comme pour la question 2, on ne sait pas si (v_n) a une limite.
4. Bonnes réponses : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.
   Pour (u_n), c'est un calcul direct, et pour (v_n), c'est la conséquence du théorème des gendarmes.

Exercice n°15 de la feuille :

1. On calcule f' (dérivée d'un quotient) et on trouve facilement que $f'(x) = \dfrac{10}{(x+4)^2}$.
   Ainsi, f' est strictement positive, et donc f est strictement croissante sur I. On en déduit que pour tout x appartenant à $[0 ; 1]$, $f(x)$ appartient à $[f(0) ; f(1)]$.
   On a : $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = 1$, donc pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à $[1/2 ; 1]$ qui est inclus dans I. Donc $f(x) \in I$.
2. On raisonne par récurrence.
   Soit $P(n)$ la propriété : u_n appartient à I.
   Initialisation : $u_0 = 0,5$ donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie : u_n appartient à I.
   Alors d'après la question 1, $f(u_n)$ appartient à I.
   Or, $f(u_n) = u_{n+1}$. Ainsi, u_{n+1} appartient à I et $P(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ implique $P(n+1)$.
   D'après le principe du raisonnement par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3.



(a)

(b) Le graphique suggère que (u_n) est croissante et converge vers 1.

(c) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n=\dfrac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}=\dfrac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

(d) La suite (u_n) est croissante d'après la question 3(c) et majorée par 1 d'après la question 2. Donc, d'après le théorème 4 du cours (théorème de convergence monotone), (u_n) est convergente.

(e) Nous ne pouvons pas répondre à cette question pour l'instant, car nous n'avons pas fait le cours sur les fonctions continues.
Pour calculer l, on résout l'équation $f(x)=x$.
En utilisant le même calcul que pour la question 3(c), on peut écrire :
$f(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{3x+2}{x+4}-x=0 \Leftrightarrow \dfrac{(1-x)(x+2)}{x+4}=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-2$.
Seule la solution $x=1$ convient car f est définie sur [0 ; 1]. Ainsi : l = 1.

4.

(a) $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\dfrac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}+2}$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par u_n+4 :

$v_{n+1}=\dfrac{3u_n+2-(u_n+4)}{3u_n+2+2(u_n+4)}=\dfrac{2u_n-2}{5u_n+10}=\dfrac{2}{5}\dfrac{u_n-1}{u_n+2}=\dfrac{2}{5}v_n$.

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique, de raison $\dfrac{2}{5}$.

(b) $v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+2}=-\dfrac{1}{2}$.

Comme (v_n) est géométrique, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0\times q^n$, soit $v_n=-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

(c) $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$ et $u_n\neq-2$ donc $v_n(u_n+2)=(u_n-1)\Leftrightarrow v_n u_n+2v_n=u_n-1\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-2v_n-1$.

Pour $v_n\neq 0$, on obtient : $u_n=\dfrac{-2v_n-1}{v_n-1}=\dfrac{1+2v_n}{1-v_n}$.

On remplace v_n par l'expression en fonction de n trouvée à la question (b) :

$$u_n=\frac{1+2\times-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n} .$$

(d) Comme $-1<\dfrac{2}{5}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=1$.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.