Correction du devoir surveillé nº1

Exercice 1 :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2+3n+1}{3n-n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{-n^2} = -1$: $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1}$

2. La suite (u_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{5}$.

   Comme $-\dfrac{1}{5} \in]-14;1[$, on sait d'après le cours que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

3. On sait que pour tout n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$.

   On en déduit : $\sqrt{n}-1 \leqslant \sqrt{n}+\cos(n) \leqslant \sqrt{n}+1$ puis, comme n est positif : $\dfrac{\sqrt{n}-1}{n} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}+\cos(n)}{n} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}+1}{n}$.

   D'autre part : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}-1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}}{n} - \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

   Par la même méthode, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{n} = 0$.

   Résumons. On a :

   $$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\sqrt{n}-1}{n} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}+\cos(n)}{n} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}+1}{n} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}-1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{n} = 0 \end{array}\right\} \text{donc, d'après le théorème des gendarmes, } \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\cos(n)}{n} = 0}.$$

4. *Méthode 1 :*
   On peut appliquer le théorème sur la limite de la composée d'une suite et d'une fonction :

   $$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2+2n}{n^3+3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2}{n^3} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 \end{array}\right\} \text{donc, } \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}.$$

   Méthode 2 :

   On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2+2n}{n^3+3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2}{n^3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n}$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{2n^2+2n}{n^3+3}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{2}{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = 0$.
   (Ici, on utilise sans le dire le fait que la fonction racine carrée est continue en 0.)

Exercice 2 :

1. L'affirmation est **fausse**.

   Un contre-exemple simple est donné par la suite de terme général : $u_n = -\dfrac{1}{n}$.

   (u_n) est croissante car c'est une restriction de la fonction $x \to -\dfrac{1}{x}$ qui est croissante sur]0 ; +∞[.
   Mais (u_n) est majorée par 0 puisque ses termes sont tous négatifs.
   Donc (u_n) ne peut pas avoir pour limite +∞.

2. L'affirmation est **vraie** : c'est le théorème 5 du cours.

3. L'affirmation est **vraie**. Si la suite (u_n) est croissante, on a : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots$

Autrement dit, pour tout n : $u_n \geqslant u_0$. Donc la suite (u_n) est minorée.

4. L'affirmation est **fausse**. Un contre-exemple simple est donné par la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.
   On a pour tout n : $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc (u_n) est bornée.
   Pourtant, (u_n) n'est pas convergente car elle n'a pas de limite.

Exercice 3 :

1. On remplace n par 0 ; on obtient alors : $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 1 + 3 = 4$.
   On remplace n par 1 ; on obtient alors : $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$.
   On remplace n par 2 ; on obtient alors : $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 9 + 4 + 3 = 16$.
   On voit que les premiers termes de la suite correspondent aux carrés des nombres entiers...
2. On va démontrer cette affirmation par récurrence.
   Posons : $\mathrm{P}(n)$: $u_n > n^2$.
   Initialisation : $\mathrm{P}(0)$ est vraie car $u_0 > 0^2$.
   Hérédité : Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un certain n : $u_n > n^2$.
   Alors : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$
   Donc : $u_{n+1} > n^2 + 2n + 1 + 2 = (n+1)^2 + 2$
   Donc $u_{n+1} > (n+1)^2$
   Donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.
   Ainsi : $\mathrm{P}(0)$ est vraie et $\mathrm{P}(n)$ implique $\mathrm{P}(n+1)$.
   Par conséquent, d'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout n.
3. On applique le premier théorème de comparaison (théorème1 du cours) :
   Posons $v_n = n^2$.
   On a $u_n > v_n$ pour tout n et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.
   La suite (u_n) admet bien une limite, qui est $+\infty$.
4. On a : $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 9$, $u_3 = 16$ ...
   On peut conjecturer que pour tout n, $u_n = (n+1)^2$.
   Démontrons cette conjecture par récurrence :
   Posons : $\mathrm{P}(n)$: $u_n = (n+1)^2$.
   Initialisation : $\mathrm{P}(0)$ est vraie car $u_0 = (0+1)^2$.
   Hérédité : Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie au rang n : $u_n = (n+1)^2$.
   Il faut démontrer $\mathrm{P}(n+1)$: $u_{n+1} = (n+2)^2$.
   On a : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$.
   Donc : $u_{n+1} = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$.
   Donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.
   Ainsi : $\mathrm{P}(0)$ est vraie et $\mathrm{P}(n)$ implique $\mathrm{P}(n+1)$.
   Par conséquent, d'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout n.
   Pour tout n, $\boxed{u_n = (n+1)^2}$

Exercice 4 :

1. On calcule f' : $f'(x) = \dfrac{1 \times (x-3) - (x-4) \times 1}{(x-3)^2} = \dfrac{x - 3 - x + 4}{(x-3)^2} = \dfrac{1}{(x-3)^2}$.
   On a donc : $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0;2]$.

Donc f est **strictement croissante** sur [0 ; 2].

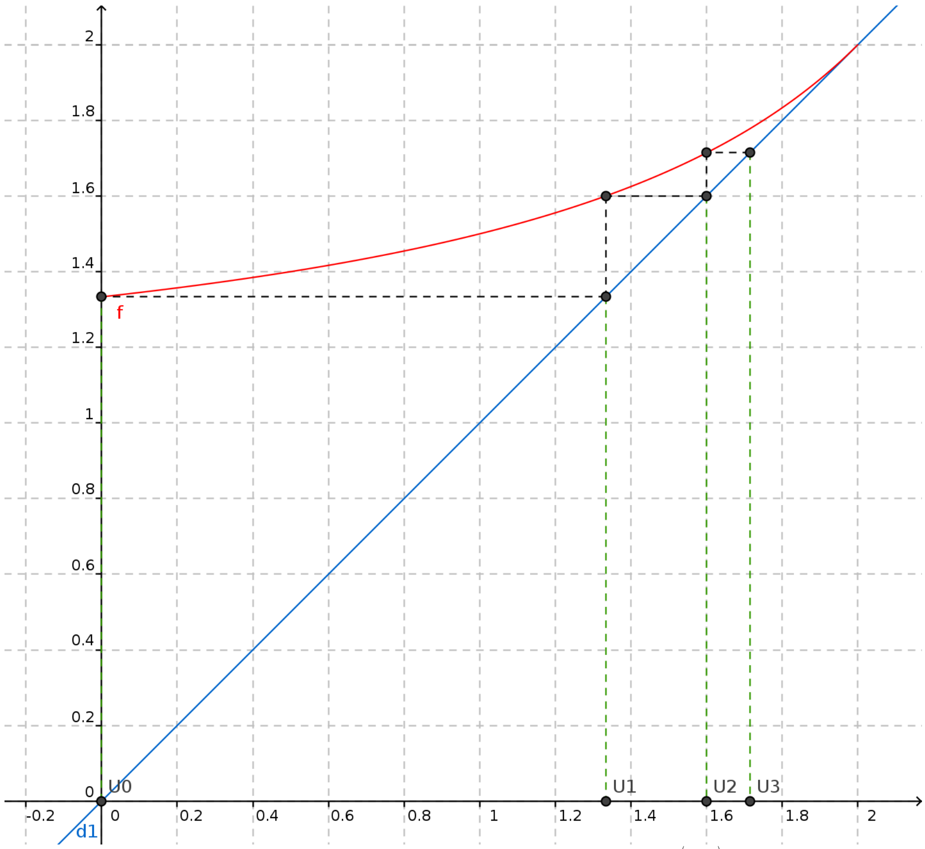
On en déduit : pour tout $x \in [0;2]$, $f(0) < f(x) < f(2)$.

Or $f(0) = \frac{4}{3}$ et $f(2) = 2$.

Donc, $0 < f(0) < f(x) < f(2) \leqslant 2$, donc $f(x) \in [0;2]$ pour tout $x \in [0;2]$.

2.

a)



b) Au vu de la construction, on peut conjecturer que (u_n) est croissante et converge vers 2.

3.

a) Par récurrence :
Posons : $\mathrm{P}(n)$: $u_n \in [0;2]$.
Initialisation : $\mathrm{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 0$.
Hérédité : Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie au rang n : $u_n \in [0;2]$.
On a d'après la question 1 : $f(u_n) \in [0;2]$.
Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient : $u_{n+1} \in [0;2]$.
Donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.
Ainsi : $\mathrm{P}(0)$ est vraie et $\mathrm{P}(n)$ implique $\mathrm{P}(n+1)$.
Donc, d'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout n.

b) *Méthode 1 : par récurrence.*
Posons : $\mathrm{P}(n)$: $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Initialisation : $\mathrm{P}(0)$ est vraie car $u_0 \leqslant u_1$ (d'après le calcul de la question1).
Hérédité : Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie au rang n : $u_n \leqslant u_{n+1}$.
On a démontré à la question 1 que f est croissante ; par conséquent $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$.
Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, on obtient : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
Donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.
Ainsi : $\mathrm{P}(0)$ est vraie et $\mathrm{P}(n)$ implique $\mathrm{P}(n+1)$.

Donc, d'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout n.
Donc (u_n) est croissante.

Méthode 2 : par un calcul direct.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n-4}{u_n-3}-u_n=\frac{u_n-4}{u_n-3}-\frac{u_n^2-3u_n}{u_n-3}=\frac{u_n-4-u_n^2+3u_n}{u_n-3}=\frac{-u_n^2+4u_n-4}{u_n-3}=\frac{-(u_n-2)^2}{u_n-3}=\frac{(u_n-2)^2}{3-u_n}.$$

Comme $u_n\in[0;2]$ (question 3.a), alors $3-u_n>0$; $(u_n-2)^2\geqslant 0$ car c'est un carré.
Donc $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ pour tout n.
Donc (u_n) est **croissante**.

c) On applique le théorème 4 du cours : toute suite croissante majorée est convergente.
Ici, (u_n) est croissante et majorée (par 2, par exemple).
Donc elle est convergente.

4.

a) Il faut démontrer que pour tout n, $v_{n+1}=v_n-1$.

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-2}=\frac{1}{\dfrac{u_n-4}{u_n-3}-2}=\frac{1\times(u_n-3)}{\left(\dfrac{u_n-4}{u_n-3}-2\right)\times(u_n-3)}=\frac{u_n-3}{(u_n-4)-2(u_n-3)}=\frac{u_n-3}{u_n-4-2u_n+6}=\frac{u_n-3}{-u_n+2}$$

$$v_{n+1}=-\frac{u_n-3}{u_n-2}$$

D'autre part :

$$v_n-1=\frac{1}{u_n-2}-1=\frac{1}{u_n-2}-\frac{u_n-2}{u_n-2}=\frac{1-u_n+2}{u_n-2}=\frac{3-u_n}{u_n-2}=-\frac{u_n-3}{u_n-2}$$

On a bien $v_{n+1}=v_n-1$.
Donc (v_n) est arithmétique de raison -1.

b) Comme (v_n) est arithmétique, alors $v_n=v_0+n\times r$ où r est la raison. Ici, $r=-1$.

On a : $v_0=\dfrac{1}{u_0-2}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$.

Par conséquent : $v_n=-\dfrac{1}{2}+n\times(-1)=-\dfrac{1}{2}-n$.

Exprimons u_n en fonction de v_n :

$v_n=\dfrac{1}{u_n-2}$ donc $\dfrac{1}{v_n}=u_n-2$ donc $\dfrac{1}{v_n}+2=u_n$.

On remplace v_n par la formule précédente :

$$u_n=\frac{1}{-\dfrac{1}{2}-n}+2$$

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{2}-n=-\infty$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}-n}=0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}-n}+2=2$.

Ainsi **la limite de (u_n) est 2**.