Correction du devoir surveillé nº1

Exercice 1:

Rappel des données :

Définition : deux suites sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge, toute suite décroissante et minorée converge.

Démonstration du théorème :

Posons : (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

A) Montrons d'abord que (u_n) est majorée.

Comme v_n est décroissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_0$.
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ d'après la propriété 1.
On en déduit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_0$. Ainsi, la suite (u_n) est majorée par v_0.

B) Comme (u_n) est croissante et majorée, elle est convergente, d'après la propriété 2.

C) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n + (v_n - u_n)$. Or $\lim_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n)$ existent et sont finies. On peut donc écrire : $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} u_n + \lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n + 0 = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

Par conséquent, (v_n) est elle aussi convergente, et de même limite que (u_n).

Fin de la démonstration.

Exercice 2 :

1. Bonnes réponses : *a* et *d*.

a. $\lim_{n \to +\infty} n - \sqrt{(n)} = \lim_{n \to +\infty} n\left(1 - \frac{\sqrt{(n)}}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(n)}}\right) = +\infty$. Donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n - \sqrt{(n)}}\right)_{n>0} = 0^+$.

b. $n - \sin(n)$ est minoré par $n - 1$. Or $\lim_{n \to +\infty} n - 1 = +\infty$

c. $3^{2n} - 3^n = 3^{2n}\left(1 - \frac{3^n}{3^{2n}}\right) = 3^{2n}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 9^n\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$. Or $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} 9^n = +\infty$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} 9^n\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = +\infty$

d. $0{,}5^{3n+1} = 0{,}5^{3n} \times 0{,}5 = 0{,}5 \times (0{,}5^3)^n = 0{,}5 \times 0{,}125^n$ Or $-1 < 0{,}125 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 0{,}125^n = 0$.

2. Bonnes réponses : *a* et *d*.

a. La suite (u_n) est minorée car elle est convergente.
Soit m un minorant de (u_n), on a alors pour tout n : $u_n \geqslant m$. Comme pour tout n $u_n \leqslant v_n$, alors m est aussi un minorant de (v_n).

b. On ne voit pas pourquoi on aurait $\lim_{n \to +\infty} (v_n) = 0$. Il n'est même pas sûr que (v_n) ait une limite.

c. Non, par exemple si $v_n = 1 + \frac{1}{n}$.

d. Oui : (v_n) peut osciller entre 2 valeurs comprises entre −1 et 1.

3. Bonnes réponses : *b* et *d*.

a. La suite (u_n) n'est pas convergente. Ça se voit si on fait le graphique, mais ça se voit aussi par le calcul, car la suite (v_n) tend vers +∞, donc (u_n) aussi.

b. Oui car $u_{n+1}=2u_n-1$, donc $u_{n+1}-1=2u_n-2$ soit $v_{n+1}=2v_n$.
c. La suite (v_n) tend vers +∞, car 2>1.
d. Oui car (v_n) est croissante ; or $u_n = v_n + 1$. On peut aussi le démontrer par récurrence

4. Bonnes réponses : *b* et *d*.

On a : $x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}$ et $y_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$.

Alors :

a. (x_n) n'est pas croissante : $x_1=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$ donc $x_2<x_1$. En fait, on peut montrer que (x_n) est décroissante :

$x_{n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$ donc $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}=-\frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)}$.

Donc $x_{n+1}-x_n<0$: (x_n) est décroissante.

b. Vrai. $x_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}$ et $y_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{37}{60}$.

c. Les suites (x_n) et (y_n) sont majorées car adjacentes (voir *d*.). On peut aussi le voir directement.

En effet, $x_n=y_n+\frac{1}{n}$ donc $x_n>y_n$, donc si (x_n) est majorée, (y_n) aussi.

Or $x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}=n\times\frac{1}{n}=1$. Donc (x_n) est majorée.

d. Vrai. On a déjà démontré que (x_n) est décroissante.

On a : $y_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$ donc $y_{n+1}-y_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$.

Donc $y_{n+1}-y_n>0$: (y_n) est croissante.

D'autre part $x_n-y_n=\frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n-y_n=0$.

Récapitulons : (x_n) est décroissante, (y_n) est croissante et la différence des deux tend vers 0. Elles sont donc adjacentes.

Exercice 3 :

Donnée : *f* définie sur [0 ; 2] par : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$.

1. $f'(x)=\frac{2\times(x+1)-(2x+1)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$. On voit que *f* ' est positive sur [0 ; 2]. Donc *f* est croissante.

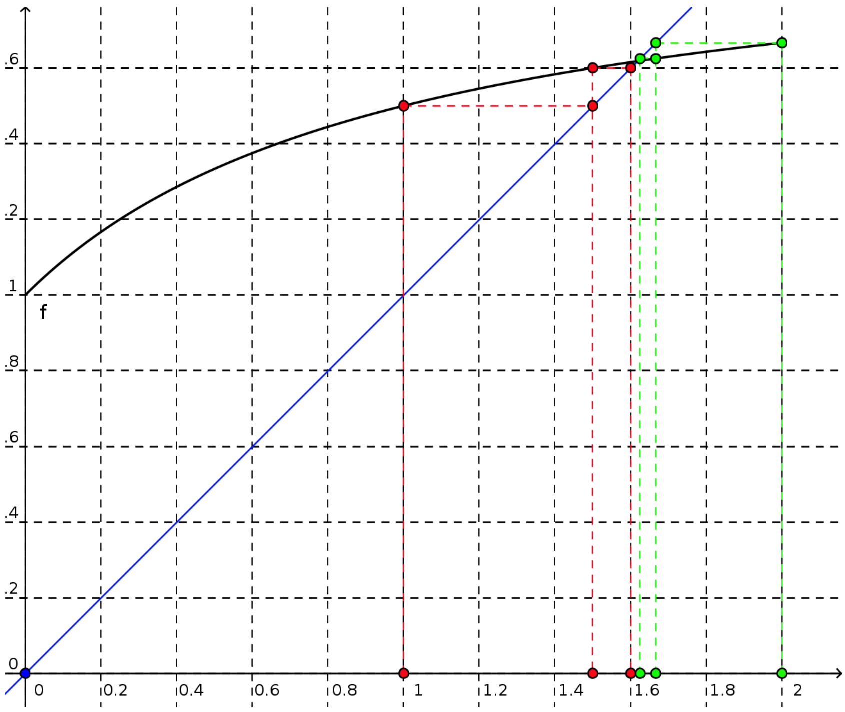
x	0	1	2
$f'(x)$		+	
$f(x)$	1	3/2	5/3

D'après le tableau, si $1\leq x\leq 2$, alors $\frac{3}{2}\leq f(x)\leq\frac{5}{3}$ donc $1\leq f(x)\leq 2$.

On a bien montré que si $x\in[1;2]$ alors $f(x)\in[1;2]$.

2.

a. Voir graphique : les u_n sont en rouge et les v_n en vert. On peut conjecturer que (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et les deux convergent vers la même limite, égale à 1,6 environ.



b. Soit $\mathscr{P}(n)$: $1 \leq v_n \leq 2$.

- Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $v_0 = 2$.
- Hérédité : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. D'après la question 1, on en déduit : $1 \leq f(v_n) \leq 2$.
  Comme $f(v_n) = v_{n+1}$ alors on a $1 \leq v_{n+1} \leq 2$ donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par conséquent, d'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathscr{P}'(n)$: $v_{n+1} \leq v_n$.

- Initialisation : $\mathscr{P}'(0)$ est vraie car $v_1 = f(v_0) = f(2) = \dfrac{5}{3} < 2$. On a bien $v_1 \leq v_0$.
- Hérédité : Supposons $\mathscr{P}'(n)$ vraie. On a donc : $v_{n+1} \leq v_n$.
  On veut démontrer $\mathscr{P}'(n+1)$: $v_{n+2} \leq v_{n+1}$.
  Comme f est croissante sur [0 ; 2], alors $f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$ soit $v_{n+2} \leq v_{n+1}$. Ainsi, $\mathscr{P}'(n+1)$ est vraie.

Par conséquent, d'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathscr{P}'(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Traduction : (v_n) est décroissante.

c. *Première partie :* C'est du calcul.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{(2v_n+1)(u_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)} - \frac{(2u_n+1)(v_n+1)}{(u_n+1)(v_n+1)}$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2v_n u_n + 2v_n + u_n + 1 - 2u_n v_n - 2u_n - v_n - 1}{(v_n+1)(u_n+1)} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} .$$

Deuxième partie :
Démontrons d'abord que pour tout n, $v_n - u_n \geq 0$.
Remarquons que pour tout n, $(v_n + 1)$ et $(u_n + 1)$ sont positifs puisque $1 \leq v_n \leq 2$ et $1 \leq u_n \leq 2$.
Par conséquent, compte tenu de la première partie, $v_{n+1} - u_{n+1}$ a le même signe que $v_n - u_n$.
Soit alors $\mathscr{P}''(n)$: $v_n - u_n \geq 0$.

- Initialisation : $\mathscr{P}''(0)$ est vraie car $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$.

- Hérédité : Si $v_n - u_n \geq 0$ alors $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$ d'après la remarque précédente.
  Autrement dit, $\mathscr{P}''(n)$ implique $\mathscr{P}''(n+1)$.

Donc, d'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathscr{P}''(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons à présent que pour tout n, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

Comme $1 \leq v_n \leq 2$ pour tout n, alors $2 \leq v_n + 1 \leq 3$; le même raisonnement montre que $2 \leq u_n + 1 \leq 3$.

On en déduit : $2 \leq v_n + 1 \leq 3$ et donc $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \frac{1}{4}$.

On multiplie par $v_n - u_n$, qui est positif, donc on conserve le sens des inégalités.

On obtient : $\frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$ ce qui s'écrit aussi : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Soit $\mathscr{P}'''(n)$: $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

- Initialisation : $\mathscr{P}'''(0)$ est vraie car $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$.
- Hérédité : Supposons $\mathscr{P}'''(n)$ vraie. On a donc : $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

  D'après la question *c.*, on a aussi : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

  En combinant ces deux relations, on peut écrire : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n) \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

  Ainsi, $\mathscr{P}'''(n+1)$ est vraie : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

Par conséquent, d'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathscr{P}'''(n)$ est vraie pour tout n.

e. Montrons que $v_n - u_n$ tend vers 0.

On a pour tout n : $v_n - u_n \geq 0$ (question *c.*) et $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ (question *d.*)

Si on pose : $w_n = 0$ et $t_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, on peut écrire $w_n \leq v_n - u_n \leq t_n$ pour tout n.

D'autre part $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$ (c'est évident) et $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$ car (t_n) est une suite géométrique de raison comprise strictement entre −1 et 1.

Alors, on peut appliquer le théorème des gendarmes : la suite $(v_n - u_n)$ est convergente, de limite 0.

Récapitulons :

(u_n) est croissante, (v_n) est décroissante (question *b.*), et la différence $v_n - u_n$ tend vers 0.

Ainsi, par définition, les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

Un théorème du cours (partiellement démontré dans l'exercice 1) permet alors d'en déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.

Voilà.