Limite d'une suite - Exercices

Exercice 1 :

Déterminer la limite des suites définies ci-dessous en utilisant les résultats du cours. Chaque suite est définie sur $\mathbb{N}$, sauf mention contraire.

1. $u_n = 3n$
2. $v_n = n^2 + 3n$
3. $w_n = 5n^2 + 4 + \sqrt{n} + \dfrac{1}{n}$ sur $\mathbb{N}^*$
4. $z_n = n^2 - 3n$
5. $t_n = n - 5\sqrt{n} + \dfrac{9}{n}$ sur $\mathbb{N}^*$
6. $s_n = \sqrt{n^3} - 5n$
7. $r_n = \sqrt{2n+3}$
8. $q_n = \dfrac{n-1}{n+3}$
9. $p_n = \dfrac{n-5}{n^2+3n+1}$
10. $a_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n+5}}$
11. $b_n = 5^n$
12. $c_n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$
13. $d_n = 7^{2n-3}$
14. $e_n = \dfrac{2^{2n+1}}{5^{n+2}}$
15. $k_n = 5 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

Exercice 2 :

Même exercice. Penser à utiliser les résultats de première sur la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. $u_n = 1 + 2 + 4 + ... + 2^n$
2. $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + ... + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
3. $w_n = 3 + \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{25} + ... + \dfrac{3}{5^n}$
4. $z_n = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + ... + 9 \times 0{,}1^n$ sur $\mathbb{N}^*$

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$

1. Comment faut-il définir la fonction f pour avoir : $u_{n+1} = f(u_n)$?
2. Dans un repère, représenter la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

3. Placer u_0 et construire graphiquement u_1, u_2, u_3. Que peut-on conjecturer ?
4. On pose : $v_n = u_n - 4$.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
5. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
6. En déduire la limite l de la suite (u_n).
7. Proposer un algorithme permettant de calculer le plus petit entier n pour lequel $|l - u_n| \leq 10^{-3}$.

Exercice 4 :

L'objectif est de démontrer le résultat du cours : si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

1. Soit a un nombre réel strictement positif.
   Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(1+a)^n \geq 1 + na$.
2. Soit $q > 1$. On pose $q = 1 + a$.
   En utilisant un théorème de comparaison, démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.