Correction de l'exercice 72 page 187

1. Par récurrence.

   Soit $\mathrm{P}(n)$: $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_n}$.

- **Initialisation** : $\mathrm{P}(0)$ est vraie (facile).
- **Hérédité** :

  $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant u_n\leqslant 1$ implique :

  $1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant u_n+1\leqslant 2$ donc :

  $1\leqslant u_n+1\leqslant 2$ donc, vu que la fonction racine carrée est croissante :

  $1\leqslant\sqrt{u_n+1}\leqslant\sqrt{2}$ donc :

  $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{u_n+1}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}$ donc :

  $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{u_n+1}\leqslant 1$ soit :

  $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

  Conclusion :

  On voit que $\mathrm{P}(0)$ est vraie et que $\mathrm{P}(n)$ implique $\mathrm{P}(n+1)$.

  D'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathrm{P}(0)$ est vraie pour tout n.

2. On sait que : $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$. Appliquant cette formule avec $a=b$, on obtient : $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=\cos^2 a-\left[1-\cos^2 a\right]=2\cos^2 a-1$.

   Posons : $a=\frac{x}{2}$; on obtient : $\cos(x)=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1$, d'où : $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\cos(x)+1}{2}$.

   Ici, il faut faire attention car $a^2=b^2$ équivaut à $a=b$ ou $a=-b$.

   Donc, $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{\cos(x)+1}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{\cos(x)+1}{2}}$.

   Ici, $x\in[0;\pi]$, donc $\frac{x}{2}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

   Or, si $a\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos(a)\geqslant 0$ (cercle trigonométrique ou représentation graphique).

   Donc, c'est ici la solution positive qui est la bonne :

   $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{\cos(x)+1}{2}}$.

3. Posons : $\mathrm{P}(n)$: $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

   Initialisation :

$u_0=0=\cos\left(\frac{\pi}{2^1}\right)$ donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un certain n : $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Alors : $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}}$.

D'après la question précédente, ceci s'écrit : $u_{n+1}=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$. C'est $\mathrm{P}(n+1)$.

Conclusion :

$\mathrm{P}(0)$ est vraie et $\mathrm{P}(n)$ implique $\mathrm{P}(n+1)$.

Donc d'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathrm{P}(0)$ est vraie pour tout n.

4. On voit que u_n s'obtient comme composée de la suite (v_n) telle que $v_n=\frac{\pi}{2^{n+1}}$ et de la fonction cosinus.

   On peut donc appliquer le théorème 2 du cours sur les limites.

   On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ car $\frac{1}{2}\in]-1;1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$.

   D'autre part, comme la fonction cosinus est continue, on a : $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=\cos(0)=1$.

   On a donc : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2^{n+1}}=0\\ \lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=1\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)=1$.

Conclusion : la suite (u_n) a pour limite 1 en $+\infty$.