

Mathématiques - Devoir surveillé n° 7

Exercice 1 :

Soit (E) l'équation différentielle : $2y' + y = 6$.

1. Donner la forme générale des fonctions f solutions de (E) .
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition : $f(0) = 5$.

Exercice 2 :

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.

1. Donner la forme générale des fonctions f solutions de (E) .
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6$.

Exercice 3 :

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données.

La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation.

On note P_E et P_S les puissances respectives du signal à l'entrée et à la sortie d'une fibre.

Pour une fibre de longueur L exprimée en kilomètres (km), la relation liant P_E , P_S et L est donnée par :

$$P_S = P_E \times e^{-\alpha L}$$

où α est le coefficient d'atténuation linéaire dépendant de la fibre.

Une entreprise utilise deux types de fibre optique de coefficients d'atténuation différents.

Dans tout l'exercice :

- la puissance du signal à l'entrée de la fibre est 5 mW ;
- à la sortie, un signal est détectable si sa puissance est d'au moins 0,08 mW ;
- pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient strictement inférieure à 0,08 mW.

Partie A

Le premier type de fibre de longueur 100 km utilisé par l'entreprise a un coefficient d'atténuation linéaire $\alpha = 0,042$.

Pour ce type de fibre, sera-t-il nécessaire de placer au moins un amplificateur sur la ligne pour que le signal soit détectable en sortie ?

Partie B

La puissance du signal le long du second type de fibre est modélisée par une fonction g de la variable x , où x étant la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre. On admet que cette fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle

$$y' + 0,034y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,034y = 0$.
2. a) Sachant que $g(0) = 5$, vérifier que g est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 5e^{-0,034x}$.
b) En déduire le coefficient d'atténuation de cette fibre.
3. a) Étudier le sens de variation de la fonction g .
b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. a) Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?
b) Déterminer la longueur maximale de la fibre permettant une détection du signal à la sortie sans amplification.