Corrigé du devoir surveillé n° 7

Exercice 1 :

1. L'équation (E) est équivalente à : $y' + \dfrac{1}{2}y = 3$
   Les solutions sont, d'après le cours, les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t} + \dfrac{3}{\frac{1}{2}} = Ce^{-\frac{1}{2}t} + 6$
   où C est une constante réelle.
2. $f(0) = 5$ équivaut à : $Ce^{-\frac{1}{2}\times 0} + 6 = 5$ soir : $C + 6 = 5$
   Donc $C = -1$.
   La solution de (E) vérifiant la condition initiale donnée est donc la fonction f telle que :
   $$f(t) = -e^{-\frac{1}{2}t} + 6$$

Exercice 2 :

1. (E) est de la forme : $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 2$.
   D'après le cours, les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$
   où λ et μ sont deux constantes réelles.
2. $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ équivaut à : $\lambda\cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{4}\right) + \mu\sin\left(2 \times \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$
   soit : $\lambda\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \mu\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
   $\lambda \times 0 + \mu \times 1 = 1$
   $\mu = 1$

   Calculons f'.
   D'après le cours : $f'(t) = -2\lambda\sin(2t) + 2\mu\cos(2t)$
   $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 6$ équivaut donc à : $-2\lambda\sin\left(2 \times \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\mu\cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{4}\right) = 6$
   $-2\lambda\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 2\mu\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 6$
   $-2\lambda \times 1 + 2\mu \times 0 = 6$
   $-2\lambda = 6$
   $\lambda = -3$
   La solution de (E) vérifiant la condition initiale donnée est donc la fonction f telle que :
   $$f(t) = -3\cos(2t) + \sin(2t)$$

Exercice 3 :

Partie A

On calcule la puissance de sortie : $P_S = P_E \times e^{-aL}$, donc : $P_S = 5 \times e^{-0{,}042\times 100} \simeq 0{,}075$

La puissance de sortie étant inférieure à 0,08 mW, il est nécessaire de placer au moins un amplificateur.

Partie B

1. L'équation différentielle donnée est de la forme $y' + ay = b$ avec $a = 0{,}034$ et $b = 0$
   Les solutions sont, d'après le cours, les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = Ce^{-0{,}034x}$
   où C est une constante réelle.
2. a) $g(0) = Ce^{-0{,}034t} = 5$, donc $C = 5$.
   Par conséquent : $g(x) = 5e^{-0{,}034x}$

   b) Par définition, le coefficient d'atténuation est 0,034.

3. a) $g'(x) = 5 \times -0{,}034\mathrm{e}^{-0{,}034x} = -0{,}17\mathrm{e}^{-0{,}034x}$

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, on voit que $g'(x) < 0$ pour tout x.

Par conséquent, $\boxed{g \text{ est décroissante}}$.

b) On décompose :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -0{,}034x = -\infty \\ \lim\limits_{y \to -\infty} \mathrm{e}^{y} = 0 \end{array}\right\} \text{donc, par composition, } \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}034x} = 0$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} 5\mathrm{e}^{-0{,}034x} = 0$, c'est à dire : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0}$

4. a) $P_S = 5 \times \mathrm{e}^{-0{,}034 \times 100} \simeq 0{,}17$.

$P_S > 0{,}08$, donc, le signal sera $\boxed{\text{encore détecté}}$ au bout de 100 km de propagation.

b) La longueur maximale L permettant une détection du signal à la sortie sans amplification est telle que : $g(L) = 0{,}08$.

On résout cette équation :

$g(L) = 5\mathrm{e}^{-0{,}034L} = 0{,}08$

$\mathrm{e}^{-0{,}034L} = \dfrac{0{,}08}{5} = 0{,}016$

$\ln\left(\mathrm{e}^{-0{,}034L}\right) = \ln(0{,}016)$

$-0{,}034L = \ln(0{,}016)$

$L = \dfrac{\ln(0{,}016)}{-0{,}034}$

$L \simeq 121{,}6$

La longueur maximale L permettant une détection du signal à la sortie sans amplification est d'environ $\boxed{121{,}6 \text{ km}}$.