Correction de l'exercice 81 page 153

Partie A

1.a) $g(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^{x} + 2$

Par conséquent, $g'(x) = 2 \times 2\,\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^{x} = 4\,\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^{x}$

Comme $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^{x})^2$, on a : $g'(x) = 4\,(\mathrm{e}^{x})^2 - 5\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\,(4\,\mathrm{e}^{x} - 5)$

1.b) Comme $\mathrm{e}^{x} > 0$ pour tout x, le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $4\,\mathrm{e}^{x} - 5$.

On résout par exemple : $4\,\mathrm{e}^{x} - 5 \geq 0$

$4\,\mathrm{e}^{x} \geq 5$

$\mathrm{e}^{x} \geq \dfrac{5}{4}$

$\ln(\mathrm{e}^{x}) \geq \ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$

$x \geq \ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$

On en déduit le tableau :

x	0		$\ln\left(\frac{5}{4}\right)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

Calcul du minimum :

$$g\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right) = 2\,\mathrm{e}^{2\ln\left(\frac{5}{4}\right)} - 5\,\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{5}{4}\right)} + 2 = 2\left(\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}\right)^2 - 5\,\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{5}{4}\right)} + 2$$

$$g\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right) = 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \times \frac{5}{4} + 2 = 2 \times \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 2$$

$$g\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right) = \frac{25}{8} - \frac{50}{8} + \frac{16}{8} = -\frac{9}{8}$$

NB : la limite en $+\infty$ n'est pas demandée.

On peut la calculer par exemple ainsi : $g(x) = 2\,(\mathrm{e}^{x})^2 - 5\,\mathrm{e}^{x} + 2 = \mathrm{e}^{x}\left(2\,\mathrm{e}^{x} - 5 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}\right)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}} = 0$

On obtient la limite de l'expression entre parenthèses : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\,\mathrm{e}^{x} - 5 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}} = +\infty$

Et donc, par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x}\left(2\,\mathrm{e}^{x} - 5 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}\right)$

2.a) D'après le tableau de variation, la fonction g est strictement décroissante sur $\left[0\,;\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)\right]$; elle prend des valeurs entre -1 et $-\dfrac{9}{8}$, donc ne prend pas la valeur 0.

D'autre part, g est strictement croissante sur $\left[\ln\left(\frac{5}{4}\right)\,;+\infty\right[$ et prend des valeurs négatives, puis positives puisque sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.

Si on n'a pas calculé la limite, il suffit de calculer l'image d'un nombre assez grand. Par exemple, on trouve à la calculatrice : $g(5) \simeq 44000$.

Donc, g prend la valeur 0 quelque part sur $\left[\ln\left(\frac{5}{4}\right)\,;+\infty\right[$, et ce une seule fois puisqu'elle est strictement croissante.

Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique sur $[0\,;+\infty[$.

2.b) $g(\ln(2)) = 2\,\mathrm{e}^{2\ln(2)} - 5\,\mathrm{e}^{\ln(2)} - 2 = 2\,\mathrm{e}^{\ln(4)} - 5\,\mathrm{e}^{\ln(2)} + 2 = 2 \times 4 - 5 \times 3 + 2$

Ainsi, $g(\ln(2)) = 0$

2.c) On peut déduire des questions précédentes que sur $[0\,;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution qui est $\ln(2)$.

2.d)

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

$f(x) = 1 + 2x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$

1. f est définie sur $]0\,;+\infty[$, donc $x > 0$. Donc on cherche la limite en 0^+.

$\lim\limits_{x\to 0^+} 1 + 2x = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$; comme $x > 0$ alors $\mathrm{e}^x > 1$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x - 1 = 0^+$.

On en déduit (limite d'un quotient) : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = +\infty$

Conclusion : d'après la propriété de la limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 + 2x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = +\infty$.

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote (verticale) d'équation $x = 0$, c'est à dire l'axe des ordonnées.

2.a) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 + 1}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - 1} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$

Donc : $f(x) = 1 + 2x + 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = 2 + 2x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$

2. b) On a évidemment : $\lim\limits_{x\to +\infty} 2 + 2x = +\infty$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x - 1 = +\infty$.

Par conséquent, d'après la propriété de la limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = 0$

Conclusion : d'après la propriété de la limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} 2 + 2x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = +\infty$.

3.a) Posons $v(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Alors $f(x) = 2 + 2x + \dfrac{1}{v(x)}$.

Donc, d'après la propriété du cours, $f'(x) = 2 - \dfrac{v'(x)}{(v(x))^2}$.

On a : $v'(x) = \mathrm{e}^x$, donc : $f'(x) = 2 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

On réduit au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{2\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2} - \frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2} = \frac{2\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2 - \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2}$$

On développe en utilisant l'identité remarquable :

$$f'(x) = \frac{2\left(\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 2\,\mathrm{e}^x + 1\right) - \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2} = \frac{2\,\mathrm{e}^{2x} - 4\,\mathrm{e}^x + 2 - \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^x + 2}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2} = \frac{g(x)}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2}$$

3.b) et 3.c) Bien évidemment, $= \dfrac{2\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2 - \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2}$ est positif.

Le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $g(x)$.

En utilisant la question 2.d) de la partie A, on obtient le tableau de signe de f' et donc les variations de f :

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$3 + 2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Calcul du minimum de f :

$$f\left(\ln(2)\right) = 1 + 2\ln(2) + \frac{\mathrm{e}^{\ln(2)}}{\mathrm{e}^{\ln(2)} - 1} = 1 + 2\ln(2) + \frac{2}{2-1} = 3 + 2\ln(2)$$

3.d) D'après le calcul précédent, l'ordonnée de E est : $f\left(\ln(2)\right) = 3 + 2\ln(2)$

4. Vu que $f'(\ln(2)) = 0$, la tangente T est parallèle à l'axe des abscisses (« horizontale »).

Appelons D l'asymptote à $\mathscr{C}$, c'est à dire l'axe des ordonnées.