# Correction du devoir surveillé n° 4

## Exercice 1 :

a) $f(x) = (2x+3)^{20}$

On pose $u(x) = 2x+3$ ; alors $f(x) = (u(x))^{20}$

D'après le cours, on sait que $f'(x) = 20u'(x)(u(x))^{19}$

On a : $u'(x) = 2$. Donc : $f'(x) = 20 \times 2(2x+3)^{19}$

$f'(x) = 40(2x+3)^{19}$

b) $g(x) = \ln(x^2+1)$

On pose : $u(x) = x^2+1$ ; alors $g(x) = \ln(u(x))$

D'après le cours : $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Ici, $u'(x) = 2x$. Donc : $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

c)$h(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

On pose : $u(x) = \dfrac{1}{x}$ ; alors $h(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$

D'après le cours, $h'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$

Ici, $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

On obtient : $h'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

d) $k(x) = \ln(5x+2)$

On peut poser $u(x) = 5x+2$ et procéder comme au b).

On peut aussi appliquer la propriété plus simple : si $f(x) = g(ax+b)$ alors $f'(x) = ag'(ax+b)$

Ici, on a $k(x) = \ln(5x+2)$, donc $k'(x) = 5 \times \ln'(5x+2) = 5 \times \dfrac{1}{5x+2}$

Ainsi, $k'(x) = \dfrac{5}{5x+2}$

## Exercice 2 :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5\,\mathrm{e}^x + 1$

On a d'après le cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} 5\,\mathrm{e}^x = +\infty$ (produit de limites).

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x + 1 = +\infty$ (somme de limites).

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x$

On a d'après le cours : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

et : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x = 0$ (somme de limites).

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} + 1$

On a d'après le cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

Donc (somme de limites) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} + 1 = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x\,\mathrm{e}^x + 5$

On a d'après le cours : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x\,\mathrm{e}^x = 0$ (produit de limites).

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x\,\mathrm{e}^x + 5 = 5$ (somme de limites).

## Exercice 3 :

1. Limite en $-\infty$ :

   $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)\,\mathrm{e}^x + 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$
   Or, d'après le cours : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$ et : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

   Donc (somme de limites) : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1 = 1$

   Limite en $+\infty$ :

   On a :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
   Donc (produit de limites) : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)\,\mathrm{e}^x = +\infty$

   Donc (somme de limites) : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)\,\mathrm{e}^x + 1 = +\infty$

2. On pose : $u(x) = x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$
   Alors : $f(x) = u(x)v(x) + 1$ ; donc : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
   Or : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$
   On obtient alors : $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1) \times \mathrm{e}^x$
   On met $\mathrm{e}^x$ en facteur :
   $f'(x) = (1 + (x-1))\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$

3. Comme $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x$, on voit que $f'(x)$ est du signe de $x$, soit positif sur $[0\,;+\infty[$ et négatif sur $]-\infty\,;0]$.

4. On en déduit le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Calcul de $f(0)$ : $f(0) = (0-1) \times e^0 + 1 = -1 \times 1 + 1 = 0$

5. D'après le tableau, 0 est le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. Lorsque $x \in ]-\infty\,;0]$, d'après le tableau, $f(x)$ est compris entre 1 et 0. Donc $f(x)$ ne peut pas être égal à 2.
   Lorsque $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x)$ varie entre 0 et $+\infty$, donc passe par 2. Comme $f$ est croissante, elle ne prend qu'une fois la valeur 2.
   Ainsi, l'équation $f(x) = 2$ a une seule solution sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 4 :

1. $f(0{,}5) = 28e^{-1{,}2\times 0{,}5} - 30 \simeq -14{,}63$
   Au bout de 30 minutes, les ailerons atteignent la température de $-14{,}63°$ environ.

2. On sait que la dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto a\,e^{ax+b}$
   Ici, on obtient : $f'(t) = 28 \times (-1{,}2)\,e^{-1{,}2t} = -33{,}6\,e^{-1{,}2t}$.
   $e^x > 0$ pour tout $x$, donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

   On obtient le tableau :

   | $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|
   | $f'(x)$ | | $-$ | |
   | $f(x)$ | $2$ | $\searrow$ | $-30$ |

3. Une durée d'une heure et demie correspond à 1,5 heures.

   Or, $f(1{,}5) = 28 \times e^{-1.2\times 1{,}5} - 30 \simeq -25{,}37$
   $-25{,}37 \leq 24$.
   La température atteinte étant inférieure à $-24°$, elle est conforme au cahier des charges.

4. $f(t) = -24$
   $28e^{-1{,}2t} - 30 = -24$
   $28e^{-1{,}2t} = 6$
   $e^{-1{,}2t} = \dfrac{6}{28} = \dfrac{3}{14}$
   $\ln\left(e^{-1{,}2t}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{14}\right)$

$-1{,}2t = \ln\left(\dfrac{3}{14}\right)$

$t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{14}\right)}{-1{,}2}$

$t \simeq 1{,}2837$

1,2837 heures $\simeq$ 1 heure 17 minutes.

Au bout d'une heure et 27 minutes environ, la température des ailerons atteint $-24°$, ce qui est conforme au cahier des charges.