Mathématiques - Devoir surveillé n° 4

Exercice 1 (8 points) :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes (on ne s'occupe pas de l'ensemble de définition) :

a) $f : f(x) = (2x+3)^{20}$ b) $g : g(x) = \ln(x^2+1)$ c)$h : h(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ d) $k : k(x) = \ln(5x+2)$

Exercice 2 (4 points) :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5\,\mathrm{e}^x + 1$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} + 1$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x\,\mathrm{e}^x + 5$

Exercice 3 (7 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Vérifier que $f'(x) = x\,\mathrm{e}^x$.
3. Étudier le signe de f'.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Démontrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 2$ a une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (5 points) :

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en heures.

Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24 °C.

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 28\mathrm{e}^{-1{,}2t} - 30$.

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes, soit 0,5 h.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f.
3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?
4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.