Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 :

a) $f : f(x) = (x-8)^{10}$

On pose $u(x) = x - 8$; alors $f(x) = [u(x)]^10$.

Par conséquent, d'après le cours : $f'(x) = 10u'(x)[u(x)]^9$

On a : $u'(x) = 1$, donc $f'(x) = 10(x-8)^9$.

b) $g : g(x) = \ln(x^3 + 5)$

On pose $u(x) = x^3 - 5$; alors $f(x) = \ln[u(x)]$.

Par conséquent, d'après le cours : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

On a : $u'(x) = 3x^2$, donc $f'(x) = \dfrac{3x^2}{x^3 - 5}$.

c) $h : h(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$

On pose $u(x) = \cos(x)$; alors $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$.

Par conséquent, d'après le cours : $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$

On a : $u'(x) = -\sin(x)$, donc $f'(x) = -\sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}$.

Exercice 2 :

a) D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Donc (par somme) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^x + x = +\infty$

b) D'après le cours, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x + 3 = 3$

c) D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

d) D'après le cours, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x + 2 = 2$

Exercice 3 :

a) $\mathrm{e}^{3+a} \times \mathrm{e}^{2a} \times \mathrm{e}^{-3a} = \mathrm{e}^{3+a+2a-3a} = \mathrm{e}^3$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^{a+\ln(2)}}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{a+\ln(2)-a} = \mathrm{e}^{\ln(2)} = 2$

c) $\dfrac{e^{\ln(5)+2a}}{e^{\ln(2)}\times e^{a}} = \dfrac{e^{\ln(5)}\times e^{2a}}{e^{\ln(2)}\times e^{a}} = \dfrac{5\times e^{2a-a}}{2} = \dfrac{5e^{a}}{2}$

d) $\ln(e^3) - 2\ln(e) = 3\ln(e) - 2\ln(e) = \ln(e) = 1$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2e^{-x}$.

1. D'après le cours, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

   $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty\end{array}\right\}$ donc, par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

   Par conséquent (par produit) : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty$

2. On pose $u - x) = x^2$ et $v(x) = e^{-x}$, ce qui entraîne : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -e^{-x}$.
   On a : $f(x) = u(x)v(x)$, donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
   Ainsi : $f'(x) = 2x\times e^{-x} + x^2\times(-e^{-x})$
   $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$
   $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$
   $f'(x) = -(x^x - 2x)e^{-x}$
   $f'(x) = -x(x-2)e^{-x}$

3. Comme $e^{-x} > 0$ pour tout x, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $-x(x-2)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. On déduit de la question précédente :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

5. On peut répondre de deux façons.
   Première façon : Pour tout x, $x^2 \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, donc le produit x^2e^{-x} est positif.

   Seconde façon : D'après le tableau de variation, le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 0. Donc $f(x) \geq 0$ pour tout x.

6. On utilise le tableau de variation.

   Quand x décrit l'intervalle $]-\infty\,;0]$, $f(x)$ décroît strictement de $+\infty$ à 0. Donc il existe une valeur de x sur cet intervalle telle que $f(x) = 1$.

   Quand x décrit l'intervalle $[0\,;2]$, $f(x)$ croît de 0 à $4\mathrm{e}^{-2} \simeq 0{,}54$. Donc il n'existe pas de valeur de x sur cet intervalle telle que $f(x) = 1$.

   Quand x décrit l'intervalle $[2\,;+\infty[$, $f(x)$ décroît de $4\mathrm{e}^{-2} \simeq 0{,}54$ à 0. Donc il n'existe pas de valeur de x sur cet intervalle telle que $f(x) = 1$.

   Au total, on constate que l'équation $f(x) = 1$ a une seule solution sur $\mathbb{R}$.

On peut vérifier que cela concorde avec la courbe :