Corrigé du devoir surveillé n° 4

Exercice 1 :

1. On pose : $f(x) = 6x^3 - 8x + 3$.

   Une primitive de f est F définie par : $F(x) = \dfrac{6x^4}{4} - \dfrac{8x^2}{2} + 3x = \dfrac{3}{2}x^2 - 4x^2 + 3x$

   $F(2) = \dfrac{3}{2} \times 2^4 - 4 \times 2^2 + 3 \times 2 = 24 - 16 + 6 = 14$

   $F(0) = \dfrac{3}{2} \times 0^4 - 4 \times 0^2 + 3 \times 0 = 0$

   Donc : $\boxed{\displaystyle\int_0^2 6x^3 - 8x + 3 \, \mathrm{d}x = 14}$

2. On pose : $f(x) = 2\mathrm{e}^{-3x}$ et $u(x) = -3x$.

   Alors $u'(x) = -3$ et on peut écrire : $f(x) = -\dfrac{2}{3}u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

   Une primitive de f est F définie par : $F(x) = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{u(x)} = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-3x}$

   $F(\ln(7)) = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-3\ln(7)} = -\dfrac{2}{3}(\mathrm{e}^{\ln(7)})^{-3} = -\dfrac{2}{3} \times 7^{-3} = -\dfrac{2}{3 \times 7^3} = -\dfrac{2}{1029}$

   $F(1) = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-3\times 1} = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-3}$

   Donc : $\boxed{\displaystyle\int_1^{\ln(7)} 2\mathrm{e}^{-3x} \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{1029} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3}}$

3. On pose : $f(x) = \dfrac{7}{3x+1}$ et $u(x) = 3x + 1$.

   Alors $u'(x) = 3$ et on peut écrire : $f(x) = \dfrac{7}{3} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

   Une primitive de f est F définie par : $F(x) = \dfrac{7}{3}\ln(u(x)) = \dfrac{7}{3}\ln(3x+1)$

   $F(1) = \dfrac{7}{3}\ln(3 \times 1 + 1) = \dfrac{7}{3}\ln(4)$

   $F(0) = \dfrac{7}{3}\ln(3 \times 0 + 1) = \dfrac{7}{3}\ln(1) = \dfrac{7}{3} \times 0 = 0$

   Donc : $\boxed{\displaystyle\int_1^{\ln(7)} 2\mathrm{e}^{-3x} \, \mathrm{d}x = \frac{7}{3}\ln(4)}$

4. On pose : $f(x) = \cos(x + \pi)$.

   Une primitive de f est F définie par : $F(x) = \sin(x + \pi)$

   $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$

   $F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

   Donc : $\boxed{\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x + \pi) \, \mathrm{d}x = -2}$

Exercice 2 :

On pose : $f(x) = 3\mathrm{e}^x + 3$.

Une primitive de f est F définie par : $F(x) = 3\mathrm{e}^x + 3x$

$F(8) = 3\mathrm{e}^8 + 3 \times 8 = 3\mathrm{e}^8 + 24$

$F(0) = 3\mathrm{e}^0 + 3 \times 0 = 3 \times 1 = 3$

Donc : $\int_0^8 3e^x + 3 \, dx = 3e^8 + 21$

La valeur moyenne de f sur $[0;8]$ est : $\frac{1}{8-0}\int_0^8 3e^x + 3 \, dx = \frac{1}{8}\left(3e^8 + 21\right)$

Exercice 3 :

1. a) La considération de la courbe $\mathscr{C}_f$ montre que f est décroissante sur $[0;8]$. Sa dérivée f' est donc négative sur cet intervalle.
   La courbe qui correspond à cette donnée est la courbe $\mathscr{C}$.

   b) Comme $\mathscr{C}$ représente f', alors c'est Γ qui représente F.
   On lit alors graphiquement : $F(1) = 2$.

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
   Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} -\ln(x) + 1 = +\infty$
   Et donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

   Graphiquement, on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

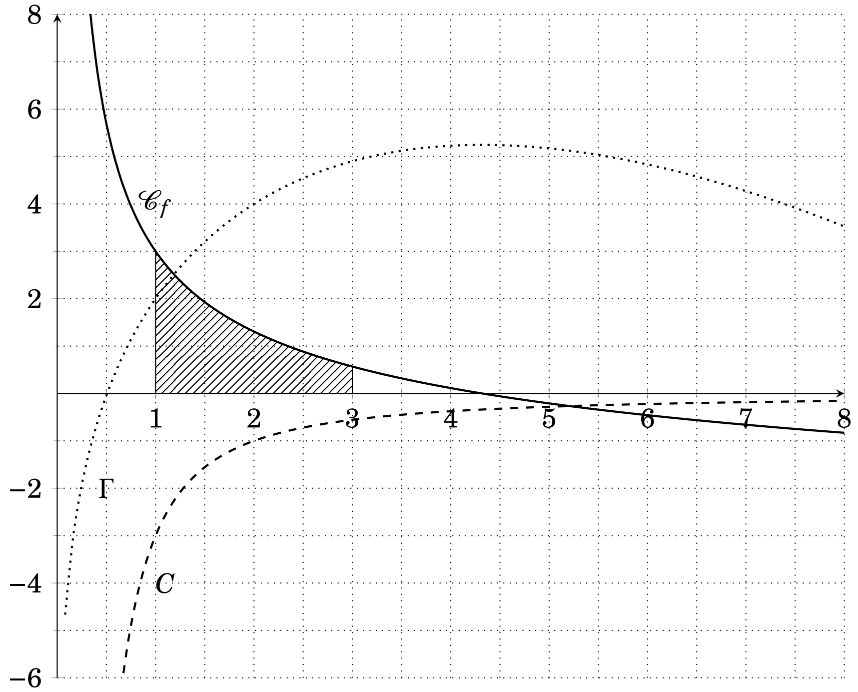
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
   Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\ln(x) + 1 = -\infty$
   Et donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

4. $f'(x) = 2 \times \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \frac{-2-x}{x^2}$

5. L'ensemble de définition de f est $]0\,;+\infty[$; donc x est positif. Donc $-2-x<0$; d'autre part $x^2>0$.
   Par conséquent : $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

6. Le graphique :



7. On applique la formule donnant la dérivée d'un produit :
$F'(x) = -1\times\ln x + (2-x)\times\dfrac{1}{x} + 2 = -\ln(x) + \dfrac{2-x}{x} + 2 = -\ln(x) + \dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{x} + 2 = -\ln(x) + \dfrac{2}{x} - 1 + 2$
$F'(x) = -\ln(x) + \dfrac{2}{x} + 1 = f(x)$
Donc, F est une primitive de f.

8. $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1)$
$F(3) = (2-3)\ln(3) + 2\times 3 = -\ln(3) + 6$
$F(1) = (2-1)\ln(1) + 2\times 1 = 0 + 2 = 2$
Donc : $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 - \ln(3)$
$\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \simeq 2{,}901$