Correction du devoir surveillé n° 1

TSTI2D1

Exercice 1 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 8\sqrt{x} - 1$

   D'après le cours :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 8\sqrt{x} = +\infty$
   Par somme de limites, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 8\sqrt{x} - 1 = +\infty$

   Pas d'asymptote.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 - 7x - 1$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x = +\infty$
   Par somme, on en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 - 7x - 1 = +\infty$

   Pas d'asymptote.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \dfrac{1}{5x^2}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 = +\infty$
   Donc par passage à l'inverse : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{5x^2} = 0$
   Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \dfrac{1}{5x^2} = 3$

   Une asymptote horizontale, d'équation $y = 3$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2 + x - 3}{2x^2 + x + 4}$

   Ici, on cherche la limite en $-\infty$ d'une fonction rationnelle ; d'après le cours, cette limite est égale à celle du quotient des termes de plus haut degré.
   Par conséquent : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2 + x - 3}{2x^2 + x + 4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{2}$
   Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2 + x - 3}{2x^2 + x + 4} = \dfrac{3}{2}$

   Une asymptote horizontale, d'équation $y = \dfrac{3}{2}$.

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{-x+2}{x-3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} -x+2 = -3+2 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} x-3 = 0^-$; donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

Par produit, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{-x+2}{x-3} = +\infty}$

Une asymptote verticale, d'équation $x = 3$.

6. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} 5 - \dfrac{5}{(x+2)^2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} x+2 = 0^+$; donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} (x+2)^2 = 0^+$

Donc, par passage à l'inverse : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \dfrac{1}{(x+2)^2} = +\infty$; donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} -\dfrac{5}{(x+2)^2} = -\infty$

Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} 5 - \dfrac{5}{(x+2)^2} = -\infty}$

Une asymptote verticale, d'équation $x = -2$.

Exercice 2 :

Soit f, la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-4}{5(x-2)}$ et C_f, sa courbe représentative.

1. On pose : $u(x) = 3x^2+2x-4$ et $v(x) = 5(x-2) = 5x-10$.
   On en déduit : $u'(x) = 6x+2$ et $v'(x) = 5$.
   D'après la formule donnant la dérivée d'un quotient :
   $f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}(x) = \dfrac{(6x+2)(5x-10)-(3x^2+2x-4)\times 5}{(5x-10)^2}$
   $f'(x) = \dfrac{30x^2-60x+10x-20-(15x^2+10x-20)}{(5x-10)^2}$
   $f'(x) = \dfrac{30x^2-60x+10x-20-15x^2-10x+20)}{(5x-10)^2}$
   $f'(x) = \dfrac{15x^2-60x}{(5x-10)^2}$
   $f'(x) = \dfrac{15x(x-4)}{(5x-10)^2}$

   Comme l'ensemble de définition est $]2\,;+\infty[$, x est toujours positif. De même, le dénominateur de $f'(x)$ est un carré, donc toujours positif.
   On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $x-4$.
   $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$. On en déduit le tableau :

x	2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$5{,}2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(4) = \frac{3\times 4^2 + 2\times 4 - 4}{5\times(4-2)} = \frac{48+8-4}{10} = \frac{52}{10} = 5{,}2$$

2. Limite en 2^+ :

   $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} 3x^2 + 2x - 4 = 3\times 2^2 + 2\times 2 - 4 = 12$

   $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x - 2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>-2}} 5(x-2) = 0^+$

   Par passage à l'inverse, on en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>-2}} \dfrac{1}{5(x-2)} = +\infty$

   Et donc, par produit : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{3x^2+2x-4}{5(x-2)} = +\infty$

   Limite en $+\infty$:

   f est une fonction rationnelle; sa limite en $+\infty$ est donc égale à celle du quotient des termes de plus haut degré :

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-4}{5(x-2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{5} = +\infty$$

   Résumons : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. On déduit de la question précédente que C_f admet une asymptote verticale, d'équation : $x = 2$.

4. D'après le cours sur les dérivées, l'équation de la tangente $\mathcal{T}_1$ à C_f au point d'abscisse 6 est : $y = f'(6)(x-6) + f(6)$.

   $$f'(6) = \frac{15\times 6\times(6-4)}{(5\times 6-10)^2} = \frac{180}{20^2} = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

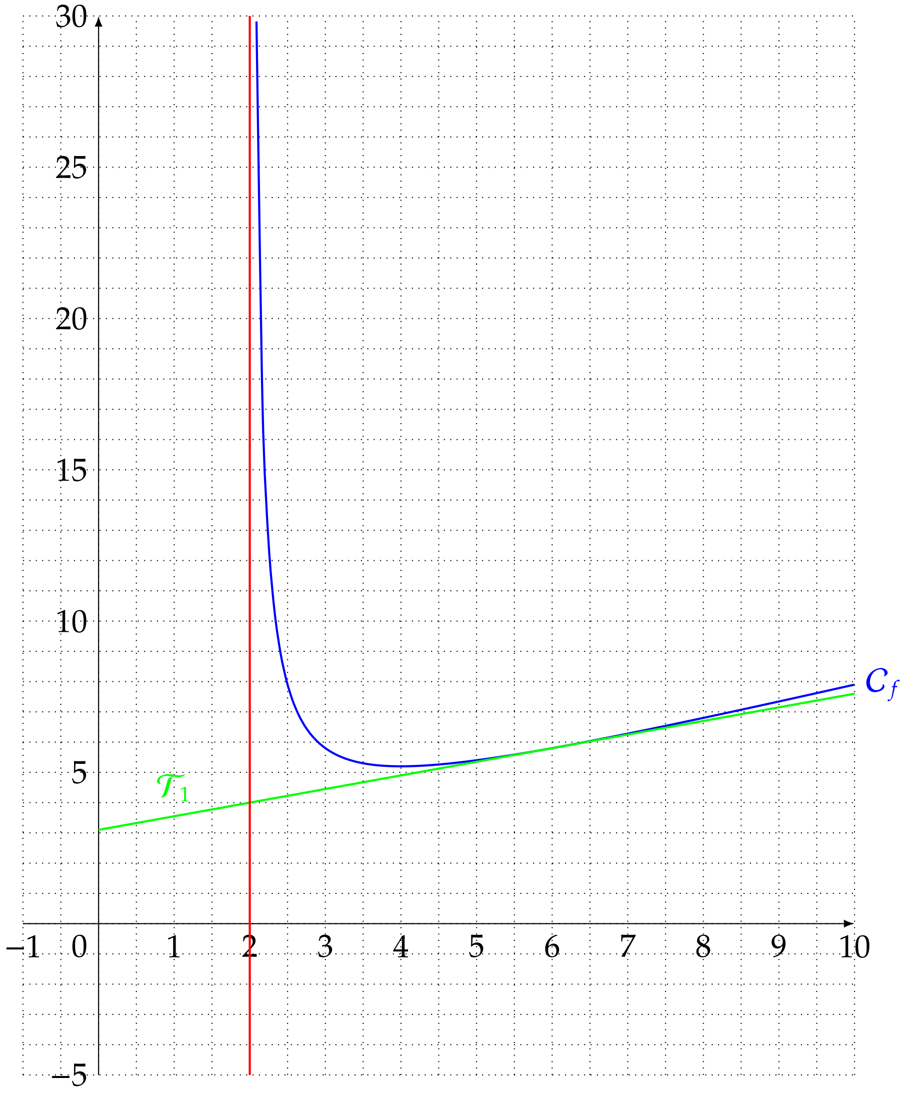
   $$f(6) = \frac{3\times 6^2 + 2\times 6 - 4}{5(6-2)} = \frac{116}{20} = 5{,}8$$

   Donc $\mathcal{T}_1 : y = 0{,}45(x-6) + 5{,}8$; on peut développer : $\mathcal{T}_1 : y = 0{,}45x - 2{,}7 + 5{,}8$

   $\mathcal{T}_1 : y = 0{,}45x + 3{,}1$

5.

Le graphique (l'asymptote est représentée en rouge) :


30
25
20
15
10
5
−5
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$\mathcal{T}_1$
C_f