Correction du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 :

1.a) $\ln(2a)+\ln(a^2)-3\ln(a)=\ln(2)+\ln(a)+2\ln(a)-3\ln(a)=\ln(2)$

Autre façon :

$\ln(2a)+\ln(a^2)-3\ln(a)=\ln(2a)+\ln(a^2)-\ln(a^3)=\ln\left(\dfrac{2a\times a^2}{a^3}\right)=\ln\left(\dfrac{2a^3}{a^3}\right)=\ln(2)$

b) $\ln(4a)-2\ln(a)+\ln\left(\dfrac{a}{8}\right)=\ln(4)+\ln(a)-2\ln(a)+\ln(a)-\ln(8)=2\ln(2)-3\ln(2)=-\ln(2)$

Autre façon :

$\ln(4a)-2\ln(a)+\ln\left(\dfrac{a}{8}\right)=\ln(4a)-\ln(a^2)+\ln\left(\dfrac{a}{8}\right)=\ln\left(\dfrac{4a\times a}{a^2\times 8}\right)$

$=\ln\left(\dfrac{4a^2}{8a^2}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln(2)$

2.a) On doit avoir $5x+1>0$, soit $x>-\dfrac{1}{5}$ et $x+3>0$, soit $x>-3$. Ces deux conditions se résument à une : $x>-\dfrac{1}{5}$.

$\ln(5x+1)=\ln(x+3)+\ln(4)$

$\ln(5x+1)=\ln((x+3)\times 4)$

$\ln(5x+1)=\ln(4x+12)$

$5x+1=4x+12$

$x=11$ Cette valeur est bien supérieure à $-\dfrac{1}{5}$.

$\mathscr{S}=\{11\}$

b) On doit avoir $x>0$ et $4x+5>0$, soit $x>-\dfrac{5}{4}$. Ces deux conditions se résument à une : $x>0$.

$2\ln(2x)=\ln(4)+\ln(4x+5)$

$\ln\left((2x)^2\right)=\ln(4(4x+5))$

$\ln(4x^2)=\ln(16x+20)$

$4x^2=16x+20$

$4x^2-16x-20=0$ On peut simplifier par 4

$x^2-4x-5=0$

$\Delta=36$

$x_1=\dfrac{4-\sqrt{36}}{2}=\dfrac{4-6}{2}=-1$ $\qquad x_2=\dfrac{4+\sqrt{36}}{2}=\dfrac{4+6}{2}=5$

-1 n'est pas supérieur à 0, donc on l'élimine. On garde 5 :

$\mathscr{S}=\{5\}$

Exercice 2 :

1. $f(x)=x^3\ln(x)-x$

On pose : $u(x)=x^3$ et $v(x)=\ln(x)$. Alors $u'(x)=3x^2$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x}$

On sait que : $(uv)'=u'v+uv'$.

Donc : $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)-1=3x^2\ln(x)+\dfrac{x^3}{x}-1$

$f'(x)=3x^2\ln(x)+x^2-1$

2. $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x+1}$

   On pose : $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x+1$. Alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$

   On sait que : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

   Donc : $g'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{\dfrac{x+1}{x} - \ln(x) \times 1}{(x+1)^2}$

   On peut simplifier en multipliant le numérateur et le dénominateur par x :

   $g'(x) = \dfrac{x+1-x\ln(x)}{x(x+1)^2}$

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

   Donc, (propriété de la limite d'une somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) + x^2 - 1 = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(3x) + x - 2$

   $\lim\limits_{x\to0^+} 3x = 0^+$

   $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^+} 3x = 0^+ \\ \lim\limits_{y\to0^+} \ln(y) = -\infty \end{array}\right\}$ donc (composition de limites) : $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(3x) = -\infty$

   D'autre part, $\lim\limits_{x\to0^+} x - 2 = -2$

   Donc, (propriété de la limite d'une somme) : $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(3x) + x - 2 = -\infty$

Exercice 4 :

Partie A :

1.a) Par lecture graphique : $f(1) = 0$

b) Par lecture graphique : $f'(1)$ est le coefficient de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 ; il est égal à -2.

   Donc $f'(x) = -2$

c) T a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -2(x-1) + 0 = -2x + 2$

   Ainsi : $T : y = -2x + 2$.

2.a) $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} + a \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{a}{x^2}$

b) $f(1) = 2\ln(1) + \dfrac{a}{1} + b = a + b$

   $f'(1) = \dfrac{2}{1} - \dfrac{a}{1^2} = 2 - a$

   Par conséquent, d'après la question 1, $a + b = 0$ et $2 - a = -2$

   On en déduit : $a = 4$ et $b = -4$.

Partie B :

1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$

donc, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) + \dfrac{4}{x} - 4 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$; donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote (verticale) d'équation $x = 0$.

2.a) $f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x}{x^2} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x-4}{x^2}$

b) Le dénominateur de $f'(x)$ est toujours positif. Étudions le signe du numérateur :

$2x - 4 \geq 0$ équivaut à $x \geq 2$.

Donc $f'(x) \geq$ équivaut à $x \geq 2$.

3. Le tableau :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln(2) - 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est $2\ln(2) \simeq -0{,}61$.

La fonction f prend des valeurs positives et négatives sur chacun des intervalles $]0\,;2]$ et $[2\,;+\infty[$.

Elle est strictement décroissante sur $]0\,;2]$ donc passe une fois par 0.

Elle est strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$ donc passe une fois par 0.

Au total, f passe deux fois par 0.

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0\,;+\infty[$.