Mathématiques - Devoir surveillé n° 2

TSTIL3 - 9 novembre 2018

Exercice 1 (6 points) :

1. Simplifier et écrire les nombres suivants sous la forme $\ln(A)$:
   a) $\ln(2a) + \ln(a^2) - 3\ln(a)$
   b) $\ln(4a) - 2\ln(a) + \ln\left(\frac{a}{8}\right)$
2. Résoudre les équations suivantes :
   a) $\ln(5x+1) = \ln(x+3) + \ln(4)$
   b) $2\ln(2x) = \ln(4) + \ln(4x+5)$

Exercice 2 (4 points) :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes (on ne s'occupe pas de l'ensemble de définition) :

1. $f : f(x) = x^3\ln(x) - x$
2. $g : g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x+1}$

Exercice 3 (2 points) :

Calculer les limites suivantes :

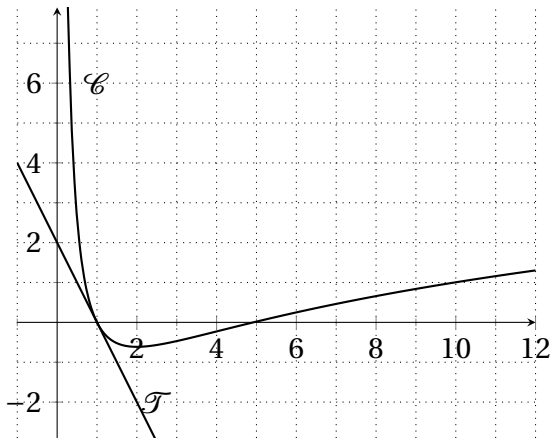
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) + x^2 - 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(3x) + x - 2$

Exercice 4 (8 points) :

Partie A :

f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

f' désigne la fonction dérivée de f.



$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.

$\mathscr{T}$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1\,;0)$.

$\mathscr{T}$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,2)$.

1.a) Par lecture graphique, déterminer $f(1)$.

b) Déterminer $f'(1)$.

c) Donner une équation de $\mathscr{T}$.

2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = 2\ln x + \dfrac{a}{x} + b$ où a et b sont des nombres réels.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Déterminer alors les valeurs de a et b.

Partie B :

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 2\ln x + \frac{4}{x} - 4.$$

1.a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

2.a) Pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, vérifier que

$$f'(x) = \frac{2x-4}{x^2}.$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Établir le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. En précisant votre démarche, donner le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$, pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.