Correction du devoir surveillé n° 2

TSTI2D1

Exercice 1 :

1. a) $\ln(a^3) + \ln(5a) - 5\ln(a) = \ln(a^3) + \ln(5a) - \ln(a^5) = \ln\left(\dfrac{a^3 \times 5a}{a^5}\right) = \ln\left(\dfrac{5a^4}{a^5}\right)$

   Donc $\ln(a^3) + \ln(5a) - 5\ln(a) = \ln\left(\dfrac{5}{a}\right)$

   b) $\ln(3a^2) - 4\ln(a) + \ln\left(\dfrac{a}{27}\right) = \ln(3a^2) - \ln(a^4) + \ln\left(\dfrac{a}{27}\right) = \ln\left(3a^2 \times \dfrac{1}{a^4} \times \dfrac{a}{27}\right)$

   $\ln(3a^2) - 4\ln(a) + \ln\left(\dfrac{a}{27}\right) = \ln\left(\dfrac{3a^3}{27a^4}\right)$

   Donc $\ln(3a^2) - 4\ln(a) + \ln\left(\dfrac{a}{27}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{9a}\right)$

2. a) $\ln(x+6) = \ln(2x+1) + \ln(5)$

   Conditions d'existence : On doit avoir $x + 6 > 0$ et $2x + 1 > 0$, soit $x > -6$ et $x > -\dfrac{1}{2}$

   Il suffit donc d'avoir $x > -\dfrac{1}{2}$

   On résout :

   $\ln(x+6) = \ln(2x+1) + \ln(5)$

   $\ln(x+6) = \ln[(2x+1) \times (5)]$

   $\ln(x+6) = \ln(10x+5)$

   $x + 6 = 10x + 5$

   $6 - 5 = 10x - x$

   $1 = 9x$

   $x = \dfrac{1}{9}$ (On vérifie que les conditions d'existence sont vérifiées.)

   b) $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(4) + \ln(x+7)$

   Conditions d'existence :

   On doit avoir $x > 0$, $x + 1 > 0$ et $x + 7 > 0$, soit $x > 0$, $x > -1$ et $x > -7$

   Il suffit donc d'avoir $x > 0$

   On résout :

   $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(4) + \ln(x+7)$

   $\ln[x(x+1)] = \ln[4(x+7)]$

   $\ln(x^2 + x) = \ln(4x + 28)$

   $x^2 + x = 4x + 28$

   $x^2 + x - 4x - 28 = 0$

   $x^2 - 3x - 28 = 0$

   $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-28) = 121$

   Deux racines : $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{121}}{2 \times 1} = \dfrac{-8}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{121}}{2 \times 1} = \dfrac{14}{2} = 7$

   Les conditions d'existences sont vérifiées pour x_2 mais pas pour x_1.

   L'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(4) + \ln(x+7)$ n'admet donc qu'une solution : $x = 7$

Exercice 2 :

1. $f(x) = x^2\ln(x) - \dfrac{1}{x}$

   $f'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{-1}{x^2}$

   $f'(x) = 2x\ln(x) + x + \dfrac{1}{x^2}$

2. $g(x) = \dfrac{2\ln(x)}{3x+1}$

   $g'(x) = \dfrac{\frac{2}{x}(3x+1) - 2\ln(x) \times 3}{(3x+1)^2}$

   $g'(x) = \dfrac{\frac{6x+2}{x} - 6\ln(x)}{(3x+1)^2}$

   $g'(x) = \dfrac{\frac{6x+2-6x\ln(x)}{x}}{(3x+1)^2}$

   $g'(x) = \dfrac{6x+2-6x\ln(x)}{x(3x+1)^2}$

Exercice 3 :

1. On a d'après le cours : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc par passage à l'inverse : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{\ln(x)} = 0$

   Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{\ln(x)} - 1 = -1$.

2. On a d'après le cours :

   $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^+} 7x = 0^+ \\ \lim\limits_{y\to0^+} \ln(y) = -\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(7x) = -\infty$

   D'autre part, $\lim\limits_{x\to0^+} x^3 = 0$

   Par conséquent, $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(7x) + x^3 = -\infty$

Exercice 4 :

I - Étude d'une fonction auxiliaire

1. $g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$

   x étant positif (vu l'ensemble de définition), $g'(x)$ est du signe de $2x^2 - 1$.

   $2x^2 - 1$ est un trinôme du second degré ; il est du signe de a, donc positif, sauf entre les racines éventuelles.

   On résout facilement :

   $2x^2 - 1 = 0$

   $2x^2 = 1$

   $x^2 = \dfrac{1}{2}$

   $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   On obtient le tableau :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{3}{2}+\ln(\sqrt{2})$	$\nearrow$	

On calcule facilement : $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \ln(\sqrt{2})$.

Or, $\ln(\sqrt{2}) > 0$ car $\frac{1}{\sqrt{2}} > 1$.

Donc $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$.

2. Le minimum de g est strictement positif, donc g est strictement positive sur $]0\ ;\ +\infty[$

II - Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative C

1. D'après le cours : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
   Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) \times \frac{1}{x} = -\infty$
   D'autre part, on a évidemment : $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

   Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

   Interprétation graphique : la courbe C admet une asymptote d'équation $x = 0$.

2. D'après le cours, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
   D'autre part, $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$.

   Par conséquent : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. $f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$
   $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2}$

   On remarque que $f'(x) = \frac{g'(x)}{x^2}$
4. On sait d'après la partie I que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$. Comme le dénominateur x est aussi positif, on a : $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. La tangente $\mathcal{T}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $y = x$. Donc, elle a le même coefficient directeur, c'est à dire 1.

   Le coefficient directeur de la tangente (rappel), c'est le nombre dérivé. Donc, l'abscisse x_A du point A doit vérifier : $f'(x_A) = 1$.

   On résout : $f'(x_A) = 1$

   $\dfrac{x_A^2 + 1 - \ln(x_A)}{x_A^2} = 1$

   $x_A^2 + 1 - \ln(x_A) = x_A^2$

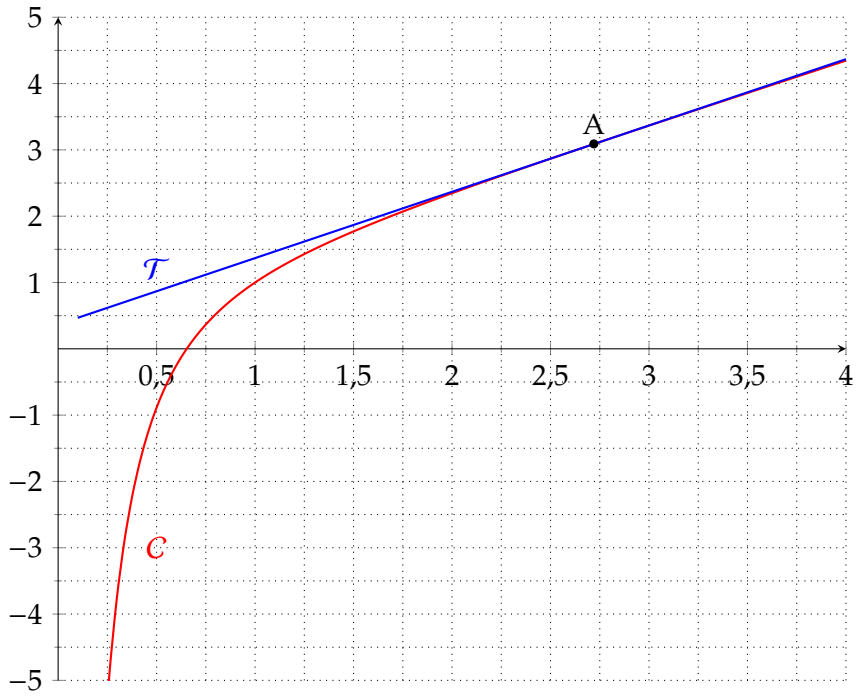
   $1 - \ln(x_A) = 0$

   $1 = \ln(x_A)$

   $\ln(e) = \ln(x_A)$

   $e = x_A$

   L'ordonnée y_A de A est $f(x_A) = f(e) = e + \dfrac{\ln(e)}{e} = e + \dfrac{1}{e}$.

   Ainsi, A a pour coordonnées : $\left(e\,;e + \dfrac{1}{e}\right)$. Ça donne environ : A(2,72 ; 3,09).

6. Le graphique :