

Correction du devoir surveillé n° 3

TSTIL3 - 19 novembre 2018

Exercice 1 :

1. a) $\ln(6x + 4) = \ln(2x + 3) - \ln(2)$

$$\ln(6x + 4) + \ln(2) = \ln(2x + 3)$$

$$\ln((6x + 4) \times 2) = \ln(2x + 3)$$

$$\ln(12x + 8) = \ln(2x + 3)$$

$$12x + 8 = 2x + 3$$

$$10x = -5$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

b) $\ln(x + 4) \leq \ln(2) + \ln(x + 1)$

$$\ln(x + 4) \leq \ln(2(x + 1))$$

$$\ln(x + 4) \leq \ln(2x + 2)$$

$$x + 4 \leq 2x + 2$$

$$4 - 2 \leq x$$

$$x \geq 2$$

c) $e^{x+1} \times e^{x+2} = e^{3x+4}$

$$e^{x+1+x+2} = e^{3x+4}$$

$$e^{2x+3} = e^{3x+4}$$

$$\ln(e^{2x+3}) = \ln(e^{3x+4})$$

$$2x + 3 = 3x + 4$$

$$-1 = x$$

$$x = -1$$

d) $\frac{e^{5x}}{e^{3x}} \geq 4$

$$e^{5x-3x} \geq 4$$

$$e^{2x} \geq 4$$

$$\ln(e^{2x}) \geq \ln(4)$$

$$2x \geq \ln(4)$$

$$x \geq \frac{\ln(4)}{2}$$

$$x \geq \frac{\ln(2^2)}{2}$$

$$x \geq \frac{2\ln(2)}{2}$$

$$x \geq \ln(2)$$

Exercice 2 :

1. $f : f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$

Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x^2$; alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$

Comme $f = \frac{u}{v}$, alors on sait que : $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\text{Ainsi : } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x(1 - 2 \ln(x))}{x \times x^3}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

2. $g : g(x) = (x^3 + 1) \ln(x)$

Posons $u(x) = (x^3 + 1)$ et $v(x) = \ln(x)$; alors $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

Comme $g = u.v$, alors : $g' = u'v + uv'$

$$\text{Ainsi : } g'(x) = 3x^2 \ln(x) + (x^3 + 1) \times \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 3x^2 \ln(x) + \frac{x^3 + 1}{x}$$

3. $h : h(x) = e^x + \frac{1}{x}$

$$h'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$$

4. $k : k(x) = (3x + 2)e^x$ Posons $u(x) = (3x + 2)$ et $v(x) = e^x$; alors $u'(x) = 3$ et $v'(x) = e^x$

Comme $k = u.v$, alors : $k' = u'v + uv'$

$$\text{Ainsi : } k'(x) = 3e^x + (3x + 2)e^x$$

$$k'(x) = (3x + 5)e^x$$

Exercice 3 :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \ln(x) - \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{On ajoute et on obtient alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \ln(x) - \frac{1}{x} = +\infty$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 5 \ln(x) - \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} 5 \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$$

$$\text{On ajoute et on obtient : } \lim_{x \rightarrow 0^+} 5 \ln(x) - \frac{1}{x} = -\infty$$

Exercice 4 :

Partie A :

1. a) $f(1) = -1$
 b) $f'(1) = 3$; c'est le coefficient directeur de $\mathcal{T}$
2. a) $f'(x) = 4 \times \frac{1}{x} + a = \frac{4}{x} + a$
 b) $f'(1) = \frac{4}{1} + a = 3$, donc : $4 + a = 3$, et donc : $a = -1$.
 $f(1) = 4 \ln(1) + a \times 1 + b = -1$, donc : $-1 + b = -1$ et donc : $b = 0$.

Partie B :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 4 \ln(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, d'après le cours.

Par conséquent : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \frac{\ln(x)}{x} - 1 = -1$

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$

La propriété sur la limite d'un produit permet de conclure : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

3. $f'(x) = 4 \times \frac{1}{x} - 1 = \frac{4}{x} - \frac{x}{x} = \frac{4-x}{x}$

4. $x \in]0 ; +\infty[$, donc $x > 0$

$4 - x \geq 0$ équivaut à : $4 \geq x$, soit : $x \leq 4$

On obtient le tableau :

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$4 \ln(4) - 4$	$-\infty$

5. On a : $4 \ln(4) - 4 \simeq 1,545$; c'est un nombre strictement positif.

Lorsque x varie de 0 à 4, $f(x)$ varie entre $-\infty$ et $\simeq 1,545$, donc passe par la valeur 0. Il en est de même lorsque x varie de 4 à $+\infty$.

Sur l'intervalle $]0;4[$, f est strictement croissante et sur $]4;+\infty[$, f est strictement décroissante.

Donc l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0;+\infty[$.