Mathématiques - Devoir surveillé n° 5

Exercice 1 (6 points) :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,25 et de premier terme $u_0 = 4$.

1. Déterminer u_n en fonction de n et calculer u_{20}.
2. Calculer $S_{20} = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{20}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche le seuil (valeur de n) à partir duquel $u_n \geq 10000$.

```
n prend la valeur 0
u prend la valeur 4
Tant que ..................
        n prend la valeur ........
        u prend la valeur ........
Afficher ............
```

Exercice 2 (14 points) :

Un centre de vacances possède une piscine de 600 m^3 soit 600 000 litres. L'eau du bassin contient du chlore qui joue le rôle de désinfectant. Toutefois le chlore se dégrade et 20 % de celui-ci disparaît chaque jour, en particulier sous l'effet des ultra-violets et de l'évaporation. Le 31 mai à 9 h, le responsable analyse l'eau du bassin à l'aide d'un kit distribué par un magasin spécialisé.

Le taux de chlore disponible dans l'eau est alors de 1,25 mg/L (milligrammes par litre).

Document

Réglementation des piscines publiques

Paramètres contrôlés	**Seuils de qualité réglementaire**	**Incidences sur la qualité de l'eau**
Présence de Chlore	Au minimum 2 mg/L	< 2 mg/L : sous chloration Risque de prolifération bactérienne dans l'eau
	Au maximum 4 mg/L	> 4 mg/L : surchloration Irritation de la peau

Source : Agence Régionale de Santé

À partir du 1er juin pour compenser la perte en chlore, la personne responsable de l'entretien ajoute, chaque matin à 9 h, 500 g de chlore dans la piscine.

Pour le bien-être et la sécurité des usagers, le responsable souhaite savoir si cet apport journalier en chlore permettra de maintenir une eau qui respecte la réglementation donnée par l'Agence Régionale de Santé pour les piscines publiques.

Partie A

1. Pour tout entier naturel n on note u_n la quantité de chlore disponible, exprimée en grammes, présente dans l'eau du bassin le n-ième jour suivant le jour de l'analyse, immédiatement après l'ajout de chlore. Ainsi u_0 est la quantité de chlore le 31 mai à 9 h et u_1 est la quantité de chlore le 1er juin à 9 h après l'ajout de chlore.

a) Montrer que la quantité de chlore, en grammes, présente dans l'eau du bassin le 31 mai à 9h est $u_0 = 750$.

Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, le responsable pouvait-il donner l'accès à la piscine le 31 mai ?

b) Montrer que $u_1 = 1100$.

c) Justifier que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 0{,}8u_n + 500$.

d) La suite (u_n) est-elle géométrique ?

2. Soit l'algorithme ci-dessous :

Variables	u : un nombre réel N : un nombre entier naturel k : un nombre entier naturel
Initialisation :	Saisir la valeur de N u prend la valeur 750
Traitement :	Pour k allant de 1 à N u prend la valeur $0{,}8u + 500$ Fin du Pour
Sortie :	Afficher u

a) Quel est le rôle de cet algorithme ?

b) Recopier et compléter le tableau suivant, par des valeurs exactes, en exécutant cet algorithme « pas à pas »pour $N = 3$.

Variables	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3
u	750	1100		

Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, au bout de combien de jours la piscine peut-elle être ouverte ?

c) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la quantité de chlore le 15$^{\text{e}}$ jour juste après l'ajout de chlore.

Partie B

Au fil du temps, la quantité de chlore évolue. On note d_n l'écart de quantité de chlore d'un jour à l'autre en grammes. Pour tout entier naturel n, on a $d_n = u_{n+1} - u_n$.

1. a) Calculer d_0, d_1 et d_2. On donnera une valeur exacte.

b) Justifier que d_0, d_1 et d_2 semblent être les termes d'une suite géométrique.

2. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -0{,}2u_n + 500$.

3. On admet que pour tout entier naturel n, on a $d_{n+1} = 0{,}8d_n$.

a) Justifier que $d_n = 350 \times 0{,}8^n$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2500 - 1750 \times 0{,}8^n$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat trouvé.