Correction du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 :

1. D'après le cours : $u_n = u_0 \times q^n$. Ici : $u_n = 4 \times 1{,}25^n$.
   Ainsi : $u_{20} = 4 \times 1{,}25^{20} \simeq 347$
2. D'après le cours : $S_{20} = u_0 \times \dfrac{1 - q^{21}}{1 - q} = 4 \times \dfrac{1 - 1{,}25^{21}}{1 - 1{,}25}$
   $S_{20} \simeq 1719$
3. D'après le cours, si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
   On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}25^n = +\infty$
   Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 \times 1{,}25^n = +\infty$, c'est à dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4.

```
n prend la valeur 0
u prend la valeur 4
Tant que u<10 000
        n prend la valeur n+1
        u prend la valeur 1,25*u
Afficher n
```

Exercice 2 :

1. a) $600\,000 \times 1{,}25 = 750\,000$
   La quantité de chlore le 31 mai est donc de 750 000 mg, soit 750 g. Donc $u_0 = 750$.

   Le responsable ne pouvait pas donner accès à la piscine car le taux de chlore (1,25 mg/L) est inférieur au taux minimum réglementaire (2 mg/L).

   b) u_1 est la quantité de chlore le 1er juin. C'est donc 750 g diminués de 20% auxquels on ajoute 500 g, ce qui donne : $u_1 = 0{,}8u_0 + 500 = 1100$

   c) La quantité de chlore le jour suivant correspond à la quantité du jour présent diminuée de 20%, à laquelle on ajoute 500 g.
   Comme diminuer de 20% revient à multiplier par $1 - \dfrac{20}{100} = 0{,}8$, on obtient : $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 500$.

   d) La suite n'est pas géométrique car on ne passe pas de u_n à u_{n+1} en multipliant par une constante.
   Le calcul des premiers termes permet de vérifier que $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$.

2. a) Manifestement, cet algorithme permet de calculer u_N.

   b)

Variables	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3
u	750	1100	1380	1604

   Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, la piscine peut être ouverte au bout de 2 jours.
   En effet, le taux de chlore est alors de : $\dfrac{1\,380\,000}{600\,000} = 2{,}3$ mg/L.

   c) On continue le calcul précédent :
   $u_0 = 750$
   $u_1 = 1100{,}0$
   $u_2 = 1380{,}0$
   $u_3 = 1604{,}0$

$u_4 = 1783{,}2$
$u_5 = 1926{,}56$
$u_6 = 2041{,}248$
$u_7 = 2132{,}998$
$u_8 = 2206{,}399$
$u_9 = 2265{,}119$
$u_{10} = 2312{,}095$
$u_{11} = 2349{,}676$
$u_{12} = 2379{,}741$
$u_{13} = 2403{,}793$
$u_{14} = 2423{,}034$
$u_{15} = 2438{,}427$
On trouve donc : $u_{15} \simeq 2438{,}427$

Partie B

1. a) $d_0 = u_1 - u_0 = 350$
   $d_1 = u_2 - u_1 = 280$
   $d_2 = u_3 - u_2 = 224$
   b) $\dfrac{d_1}{d_0} = \dfrac{d_2}{d_1} = 0{,}8$
   Effectivement, d_0, d_1 et d_2 semble bien être les termes consécutifs d'une suite géométrique.
2. On a : $d_n = u_{n+1} - u_n = 0{,}8u_n + 500 - u_n = -0{,}2u_n + 500$
3. a) On admet que pour tout entier naturel n, on a $d_{n+1} = 0{,}8d_n$. Par conséquent, (d_n) est une suite géométrique de raison 0,8.
   D'après le cours, on a donc : $d_n = d_0 \times q^n$, soit ici : $d_n = 350 \times 0{,}8^n$.
   b) On a d'une part : $d_n = -0{,}2u_n + 500$ d'après la question 2 et $d_n = 350 \times 0{,}8^n$ d'après la question précédente.
   Par conséquent : $-0{,}2u_n + 500 = 350 \times 0{,}8^n$
   soit : $-0{,}2u_n = -500 + 350 \times 0{,}8^n$
   et donc : $u_n = 2500 - 1750 \times 0{,}8^n$
   c) D'après le cours, si $0 \leq q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
   Ici, $0 < 0{,}8 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$
   Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1750 \times 0{,}8^n = 0$
   Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2500 - 1750 \times 0{,}8^n = 2500$
   Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2500$
   À long terme, si la personne responsable continue à appliquer la même méthode, la quantité de chlore va se stabiliser autour de 2500 g.