Corrigé du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 :

- $f : f(x) = 0{,}8^x$
  $0{,}8 < 1$, donc la fonction f est décroissante.
- $g : g(x) = 0{,}4 \times 2{,}5^x$
  $2{,}5 > 1$ donc la fonction g est croissante.
- $h : h(x) = \left(\dfrac{51}{45}\right)^x$
  $\dfrac{51}{45} > 1$ donc la fonction h est croissante.
- $k : k(x) = 78 \times \left(\dfrac{5}{7}\right)^x$
  $\dfrac{5}{7} < 1$ donc la fonction k est décroissante.

Exercice 2 :

- $3^{x+1} = 3^{2x+3}$
  Comme la fonction $x \mapsto 3^x$ est strictement croissante, l'égalité des images implique l'égalité des antécédents.

  Donc $3^{x+1} = 3^{2x+3}$ est équivalent à $x + 1 = 2x + 3$
  On résout :
  $x - 2x = 3 - 1$
  $-x = 2$
  $x = -2$ $\quad \mathcal{S} = \{-2\}$
- $5^{x+3} = 1$
  L'équation peut s'écrire : $5^{x+3} = 5^0$
  On en déduit (même raisonnement qu'à la question précédente) : $x + 3 = 0$
  Donc : $x = -3$ $\quad \mathcal{S} = \{-3\}$
- $2^x \times 2^3 = 2^{5x-5}$
  On transforme l'expression donnée :
  $2^x \times 2^3 = 2^{5x-5}$ est équivalent à $2^{x+3} = 2^{5x-5}$
  C'est équivalent à : $x + 3 = 5x - 5$
  $x - 5x = -5 - 3$
  $-4x = -8$
  $x = \dfrac{-8}{-4} = 2$ $\quad \mathcal{S} = \{2\}$
- $9^x = 3^{x+2}$
  Il faut transformer l'écriture pour avoir deux bases égales.
  On remarque que $9 = 3^2$, donc $9^x = 3^{x+2}$ est équivalent à :
  $(3^2)^x = 3^{x+2}$
  soit : $3^{2x} = 3^{x+2}$
  $2x = x + 2$
  $x = 2$ $\quad \mathcal{S} = \{2\}$

Exercice 3 :

- $3^{3x} \leq 3^{x+5}$

  Comme $3 > 1$, la fonction $x \mapsto 3^x$ est strictement croissante ; donc les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents.

  Ainsi, $3^{3x} \leq 3^{x+5}$ est équivalent à : $3x \leq x + 5$
  $2x \leq 5$

$x \leq \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

$\mathcal{S} =]-\infty\,;2{,}5]$

- $0{,}2^{2x+3} \geq 0{,}2^{x-1}$

  Comme $0{,}2 < 1$, la fonction $x \mapsto 0{,}2^x$ est strictement décroissante ; donc les images sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents.

  Ainsi, $0{,}2^{2x+3} \geq 0{,}2^{x-1}$ est équivalent à : $2x+3 \leq x-1$

  $x \leq -4$

  $\mathcal{S} =]-\infty\,;-4]$

Exercice 4 :

Soit $t\%$ le taux d'accroissement moyen annuel.

L'augmentation de 18% est donc équivalente à 5 augmentations successives de $t\%$.

Augmenter de $t\%$, c'est multiplier par $1+\dfrac{t}{100}$; donc ici, multiplier 5 fois de suite par $1+\dfrac{t}{100}$ revient à multiplier une fois par $1+\dfrac{18}{100}$.

On obtient donc : $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^5 = 1+\dfrac{18}{100} = 1{,}18$

Pour se débarrasser de la puissance 5, on met le tout à la puissance $\dfrac{1}{5}$:

$$\left(\left(1+\frac{t}{100}\right)^5\right)^{\frac{1}{5}} = 1{,}18^{\frac{1}{5}}$$

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^{5\times\frac{1}{5}} = 1{,}18^{\frac{1}{5}}$$

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^{1} = 1{,}18^{\frac{1}{5}}$$

Soit : $1+\dfrac{t}{100} = 1{,}18^{\frac{1}{5}}$

On trouve à la calculatrice : $1{,}18^{\frac{1}{5}} \simeq 1{,}033656884$

Donc : $1+\dfrac{t}{100} \simeq 1{,}033656884$

$\dfrac{t}{100} \simeq 0{,}033656884$

$t \simeq 3{,}3656884$

Le taux d'augmentation moyenne annuelle est donc d'environ 3,37% .

Exercice 5 :

1. $f(t)$ est un produit de trois facteurs, dont deux sont positifs : 0,1 et 4^t.
   Donc $f(t)$ a le même signe que $(-t^2+12)$.
   $-t^2+12 \geq 0$ est équivalent à : $t^2 \leq 12$, donc t compris entre $-\sqrt{12}$ et $\sqrt{12}$.

   Ici $t \geq 0$ puisque l'observation commence à $t = 0$. On obtient donc :

x	0		$\sqrt{12}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2. On voit que la concentration atteint 0 à $t = \sqrt{12}$, soit $t \simeq 3{,}464101615$.
   On convertit :
   3,464101615 jours = 3 jours et 11,13843876 heures
   11,13843876 heures = 11 heures et 8,3063256 minutes
   8,3063256 minutes = 8 minutes et 18 secondes, mais une précision à la seconde n'est pas très pertinente ici.

   On peut donc écrire : la concentration de bactéries atteint 0 au bout d'environ 3 jours 11 heures 8 minutes.

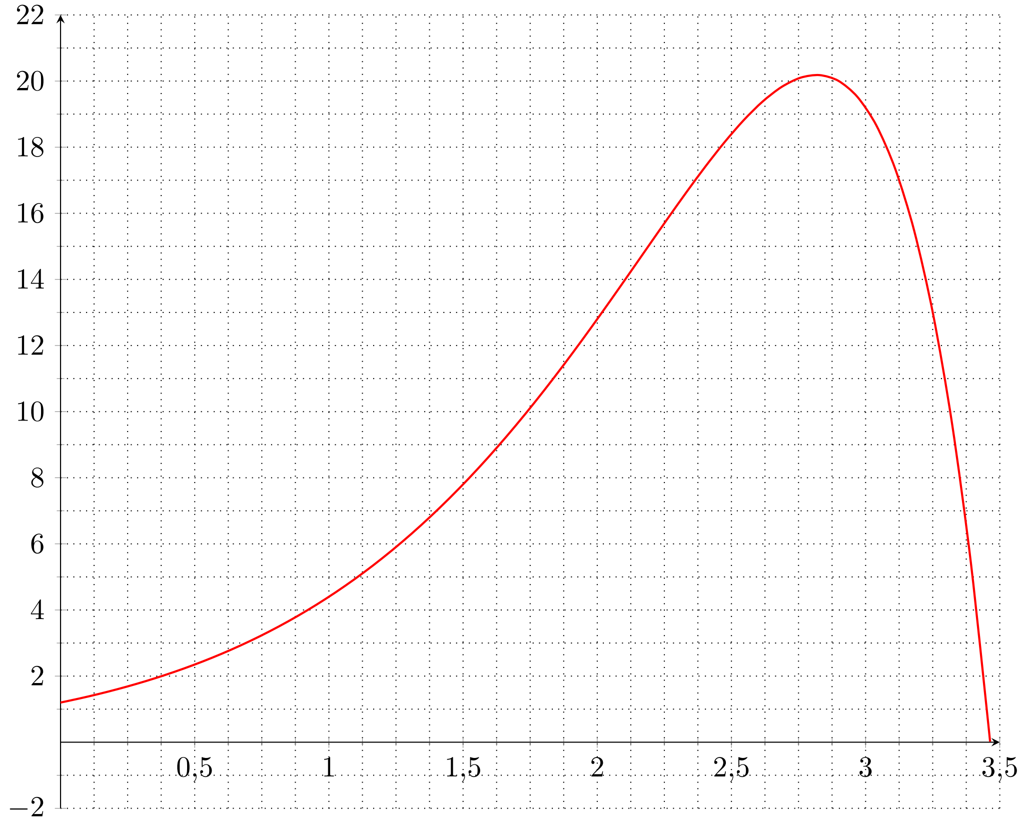
   On peut en déduire que l'expérience s'arrête à cette date (puisqu'il n'y a plus de bactéries) ; l'ensemble de définition de f est donc $[0\,;\sqrt{12}]$.

3. 12 heures représentent une demi-journée, donc $t = \frac{1}{2}$.
   On calcule : $f(0{,}5) = 2{,}35$.
   Au bout de 12 h, la concentration est donc de 2,35 milliers de bactéries par mL.

4. Le tableau (les résultats sont arrondis au centième) :

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25
$f(x)$	1,69	2,35	3,24	4,4	5,90	7,8	10,11	12,8	15,70	18,4	20,08	19,2	13,01

   La courbe :



5. La concentration maximum est (d'après le graphique) d'environ 20,2 milliers de bactéries par mL.
   Elle est obtenue pour $t \simeq 2{,}8$ soit environ 2 jours et 19 heures.

6. On trouve que l'ensemble solution est : $\mathcal{S} = [1{,}75\,;3{,}3]$.

7. La concentration est supérieure à 10 000 bactéries par mL entre $t \simeq 1{,}75$ et $t \simeq 3{,}3$, soit entre 1 jour 18 heures et 3 jours 7 heures environ après le début de l'observation.

8. On voit que $f(t)$ devient inférieure à 6 au bout de 3,38 jours soit 3 jours 9 heures environ.