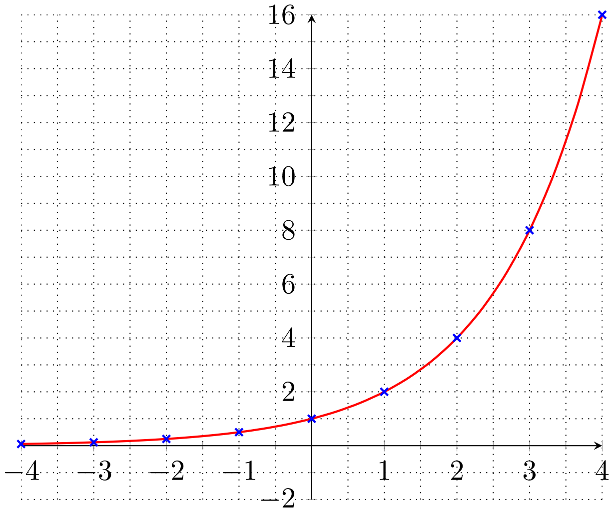
# Fonctions exponentielles

## 1 Introduction

Soit $a > 0$ un réel.

Si on représente les points de coordonnées $(n\,;a^n)$, on obtient un ensemble de points séparés. Le problème qu'on se pose est le suivant : faire passer une courbe par tous ces points, de la façon la plus régulière possible.

Exemple avec $a = 2$ :




La manière la plus naturelle est la suivante : on passe de $a^0 = 1$ à $a^1$ en multipliant par $a$. Supposons que $a^{0,5}$ existe et qu'on passe de $a^0$ à $a^{0,5}$, puis de $a^{0,5}$ à $a^1$ en multipliant à chaque fois par le même nombre positif $q$. On voit que dans ce cas, on passe de $a^0$ à $a^1$ en multipliant par $q^2$. On a donc $q^2 = a$ et $q = \sqrt{a}$.

Il suffit donc de poser : $a^{0,5n} = (\sqrt{a})^n$. Autrement dit, on obtient l'équivalent d'une suite géométrique de raison $q$, dont les indices ne seraient pas $0\,;\,1\,;\,2\,;$ etc. mais $0\,;\,0,5\,;\,1\,;\,1,5\,;$ etc.

On recommence le même procédé, en divisant $0,5$ par $2$ : on passe de $a^0$ à $a^{0,25}$, puis de $a^{0,25}$ à $a^{0,5} = \sqrt{a}$ en multipliant à chaque fois par le même nombre positif $q'$. On voit qu'on passe de $a^0$ à $a^{0,5}$ en multipliant par $q'^2$. On a donc $q'^2 = a^{0,5} = \sqrt{a}$ et donc $q' = \sqrt{\sqrt{a}}$.

Il suffit donc de poser : $a^{0,25n} = \left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)^n$.

En poursuivant ce processus indéfiniment, on obtient une suite de points de plus en plus serrés, et à la limite, ces points forment une courbe continue, qui a les propriétés qu'on recherche.

## 2 Définition

**Définition 1**
Soit $a$ un nombre réel strictement positif.
On admet qu'il existe une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(n) = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On dit que $f$ est la **fonction exponentielle** de base $a$.
On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f(x) = a^x$.

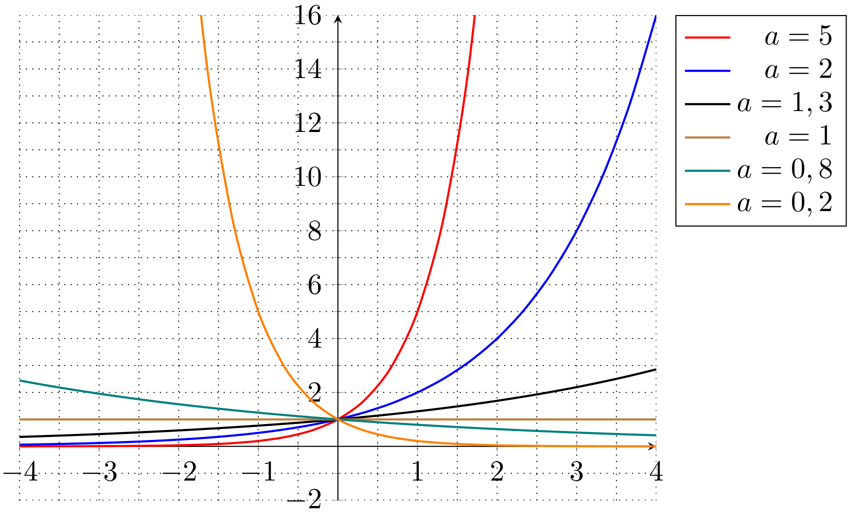
**Remarque** : on a donc défini $a^x$ pour des valeurs non entières de l'exposant. Attention cependant : cela n'est possible que si $a > 0$.

Par exemple : $2^{0,3}$ est bien défini mais $(-2)^{0,3}$ n'existe pas.

On peut utiliser la calculatrice pour ces calculs, (touche $\hat{}$) ; on trouve par exemple : $2^{0,3} \simeq 1,231144413$.

## 3 Sens de variation

Vu la définition choisie, on voit qu'une fonction exponentielle est monotone : elle est croissante si $a \geq 1$ et décroissante si $a \leq 1$.




## 4 Propriétés

**Propriété 1**
Soit $a$ un réel strictement positif, $x$ et $y$ deux réels quelconques.

- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^y = a^{x \times y}$

**Application classique : recherche d'un taux moyen.**

On cherche le taux moyen $t$ équivalent à $n$ évolutions successives. En appelant $V_i$ la valeur initiale et $V_f$ la valeur finale (obtenue après les $n$ évolutions successives), on cherche $t$ tel que $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^n = \dfrac{V_f}{V_i}$.

On applique la puissance $\dfrac{1}{n}$ aux deux membres : $\left(\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)^{\frac{1}{n}}$

Comme $\left(\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^{n \times \frac{1}{n}} = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^1 = 1 + \dfrac{t}{100}$, on en déduit :

$1 + \dfrac{t}{100} = \left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)^{\frac{1}{n}}$, égalité qui permet de trouver $t$ facilement.

**Exemple** : Une grandeur subit sur 3 ans : une hausse de 10%, une hausse 20% et une baisse de 5%. Quelle est le taux d'évolution moyen par an ?

Au total, la grandeur a été multipliée par $\left(1 + \dfrac{10}{100}\right) \times \left(1 + \dfrac{20}{100}\right) \times \left(1 - \dfrac{5}{100}\right) = 1,254$

On cherche $t$ tell que $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^3 = 1,254$ soit : $1 + \dfrac{t}{100} = (1,254)^{\frac{1}{3}}$.

On trouve à la calculatrice : $1 + \dfrac{t}{100} \simeq 1,078365153$ donc : $t \simeq 100 \times (1,078365153 - 1)$

On trouve : $t \simeq 7,84$