Devoir surveillé n° 3

Exercice 1 :

Déterminer le logarithme décimal de a (noté $\log(a)$) dans les cas suivants :

1. $a = 0,001$
2. $a = 10^{250}$
3. $a = 1000^{500}$
4. $a = (0,01)^{300}$

Exercice 2 :

Soit a un réel strictement positif. Simplifier les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $k + n\log(a)$, où k et n sont des entiers relatifs.

1. $A = \log(1000a^2)$
2. $B = \log(0,001a) + \log(10000a) - \log(10a^2)$
3. $C = \log(5a^6) - \log(5000)$
4. $D = \log(0,02a) + \log(0,005a) + \log\left(\frac{10^8}{a}\right)$

Exercice 3 :

Exprimer en fonction de $\log(a)$ et/ou $\log(b)$ les réels suivants :

1. $A = \log(ab) - \log(a^8) + \log(b^2)$
2. $B = \log\left(\frac{a}{b^2}\right) + 4\log(ab^2)$

Exercice 4 :

Résoudre les équations et inéquations suivantes. Donner la valeur exacte, puis, éventuellement, une valeur approchée au centième.

1. $3^x = 1\,162\,261\,467$
2. $5^x = 196$
3. $7^x \geq 1\,500\,000$
4. $0,2^x \leq 0,000001$

Exercice 5 :

La concentration d'une substance diminue de 20% toutes les heures. On cherche le temps au bout duquel on obtient une concentration inférieure ou égale au millième de la concentration initiale.

1. Montrer que le problème conduit à résoudre l'inéquation $0,8^x \leq 10^{-3}$.
2. Résoudre l'inéquation et répondre au problème posé.

Exercice 6 :

Lors d'un achat le 1^{er} janvier 2020, deux plantes, un ficus et un cactus, mesuraient respectivement 0,5 m et 1,2 m.

On notera u_n et v_n les hauteurs respectives en mètres de ces deux plantes au 1^{er} janvier de l'année $(2020 + n)$.

La hauteur du ficus augmente de 15% par an, alors que celle du cactus n'augmente que de 3% par an.

1. Calculer u_1 , u_2 , v_1 , v_2 au centimètre près.
2. Donner les expressions de u_n et v_n en fonction de n .
3. Déterminer, en utilisant le logarithme décimal, au cours de quelle année le ficus atteindra le plafond, à 2,5 m du sol.
4. Déterminer de même au cours de quelle année le cactus atteindra le plafond.