Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 :

1. $a = 0{,}001 = 10^{-3}$ donc par définition : $\log(a) = -3$
2. $a = 10^{250}$ donc par définition : $\log(a) = 250$
3. $\log(a) = \log\left(100^{500}\right) = 500\log(1000) = 500\log\left(10^3\right) = 500 \times 3 = 1500$
4. $\log(a) = \log\left(0{,}01^{300}\right) = 300\log(0{,}01) = 300\log\left(10^{-2}\right) = 300 \times (-2) = -600$

Exercice 2 :

1. $A = \log\left(1000a^2\right) = \log(1000) + \log(a^2)$
   $A = 3 + 2\log(a)$
2. $B = \log(0{,}001a) + \log(10\,000a) - \log\left(10a^2\right)$
   $B = \log(0{,}001) + \log(a) + \log(10\,000) + \log(a) - \log(10) - \log(a^2)$
   $B = -3 + \log(a) + 4 + \log(a) - 1 - 2\log(a)$
   $B = 0$
3. $C = \log\left(5a^6\right) - \log(5000)$
   $C = \log(5) + \log\left(a^6\right) - \log(5) - \log(1000)$
   $C = 6\log(a) - 3$ ou $C = -3 + 6\log(a)$
4. $D = \log(0{,}02a) + \log(0{,}005a) + \log\left(\dfrac{10^8}{a}\right)$
   $D = \log(0{,}02) + \log(a) + \log(0{,}005) + \log(a) + \log\left(10^8\right) - \log(a)$
   $D = \log(0{,}01 \times 2) + \log(a) + \log(0{,}001 \times 5) + 8$
   $D = \log(0{,}01) + \log(2) + \log(a) + \log(0{,}001) + \log(5) + 8$
   $D = -2 + \log(2) + \log(a) - 3 + \log(5) + 8$
   $D = \log(2) + \log(a) + \log(5) + 3$
   $D = \log(2) + \log(5) + \log(a) + 3$
   $D = \log(2 \times 5) + \log(a) + 3$
   $D = \log(10) + \log(a) + 3$
   $D = 1 + \log(a) + 3$
   $D = 4 + \log(a)$

Exercice 3 :

1. $A = \log(ab) - \log\left(a^8\right) + \log\left(b^2\right)$
   $A = \log(a) + \log(b) - 8\log(a) + 2\log(b)$
   $A = -7\log(a) + 3\log(b)$
2. $B = \log\left(\dfrac{a}{b^2}\right) + 4\log\left(ab^2\right)$
   $B = \log(a) - \log\left(b^2\right) + 4\left(\log(a) + \log\left(b^2\right)\right)$
   $B = \log(a) - 2\log(b) + 4\log(a) + 4\log\left(b^2\right)$
   $B = \log(a) - 2\log(b) + 4\log(a) + 4 \times 2\log(b)$
   $B = 5\log(a) + 6\log(b)$

Exercice 4 :

1. $3^x = 1\,162\,261\,467$
   $\log(3^x) = \log(1\,162\,261\,467)$
   $x\log(3) = \log(1\,162\,261\,467)$
   $x = \dfrac{\log(1\,162\,261\,467)}{\log(3)}$
   $x = 19$
2. $5^x = 196$
   $\log(5^x) = \log(196)$
   $x\log(5) = \log(196)$
   $x = \dfrac{\log(196)}{\log(5)}$
   $x \simeq 3{,}28$
3. $7^x \geq 1\,500\,000$
   $\log(7^x) \geq \log(1\,500\,000)$
   $x\log(7) \geq \log(1\,500\,000)$
   $x \geq \dfrac{\log(1\,500\,000)}{\log(7)}$
   $x \geq 7{,}31$ environ.
4. $0{,}2^x \leq 0{,}000001$
   $\log(0{,}2^x) \leq \log(0{,}000001)$
   $x\log(0{,}2) \leq -6$
   $x \geq \dfrac{-6}{\log(0{,}2)}$ Le sens de l'inégalité change car on divise par un nombre négatif.
   $x \geq 8{,}58$ environ.

Exercice 5 :

1. On sait que diminuer de 20% revient à multiplier par $\left(1 - \dfrac{20}{100}\right) = 0{,}8$. Donc toutes les heures, la concentration est multipliée par 0,8.
   Si x représente le temps en heures, alors la concentration est multipliée par 0,8 lorsque x augmente de 1.
   Si on note C_0 la concentration initiale, alors la concentration C vaut : $C_0 \times 0{,}8^x$.
   On veut obtenir une concentration inférieure ou égale au millième de la concentration initiale, donc on résout l'inéquation : $C \leq C_0 \times 0{,}001$, soit : $C_0 \times 0{,}8^x \leq 10^{-3}C_0$.
   En simplifiant par C_0 (qui est positif), cette inéquation est équivalente à : $0{,}8^x \leq 10^{-3}$
2. $\log(0{,}8^x) \leq \log(10^{-3})$
   $x\log(0{,}8) \leq -3$
   $x \geq \dfrac{-3}{\log(0{,}8)}$ (On divise par un nombre négatif.)
   $x \geq 30{,}957$ environ.
   Le temps au bout duquel on obtient une concentration inférieure ou égale au millième de la concentration initiale est environ 30,957 h, soit 30 h 57 min environ.

Exercice 6 :

1. D'après l'énoncé, $u_0 = 0{,}5$. Tous les ans, la hauteur du ficus augmente de 15%, donc est multipliée par 1,15.
   Donc $u_1 = u_0 \times 1{,}15 = 0{,}5 \times 1{,}15 = 0{,}575$

De même $u_2 = u_1 \times 1{,}15 \simeq 0{,}661$

Toujours d'après l'énoncé, $v_0 = 1{,}2$. Tous les ans, la hauteur du cactus augmente de 3%, donc est multipliée par 1,03.

Donc $v_1 = v_0 \times 1{,}03 = 1{,}2 \times 1{,}03 = 1{,}236$

De même $v_2 = v_1 \times 1{,}03 \simeq 1{,}273$

2. Les deux suites sont géométriques, puisqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre.

   La suite (u_n) est géométrique de raison 1,15, donc pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n$; soit $u_n = 0{,}5 \times 1{,}15^n$.

   La suite (v_n) est géométrique de raison 1,03, donc pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n$; soit $v_n = 1{,}2 \times 1{,}03^n$.

3. On résout l'inéquation : $u_n \geq 2{,}5$, soit : $0{,}5 \times 1{,}15^n \geq 2{,}5$.

   $1{,}15^n \geq \dfrac{2{,}5}{0{,}5} = 5$

   $\log\left(1{,}15^n\right) \geq \log(5)$

   $n \log(1{,}15) \geq \log(5)$

   $n \geq \dfrac{\log(5)}{\log(1{,}15)}$

   $n \geq 11{,}52$

   Ainsi, c'est au cours de la 11e année que le ficus atteindra le plafond.

4. On résout l'inéquation : $v_n \geq 2{,}5$, soit : $1{,}2 \times 1{,}03^n \geq 2{,}5$.

   $1{,}03^n \geq \dfrac{2{,}5}{1{,}2}$

   $\log\left(1{,}03^n\right) \geq \log\left(\dfrac{2{,}5}{1{,}2}\right)$

   $n \log(1{,}03) \geq \log\left(\dfrac{2{,}5}{1{,}2}\right)$

   $n \geq \dfrac{\log\left(\dfrac{2{,}5}{1{,}2}\right)}{\log(1{,}03)}$

   $n \geq 24{,}83$

   Ainsi, c'est au cours de la 24e année que le cactus atteindra le plafond.