Probabilités conditionnelles- Indépendance

Cette leçon constitue le prolongement de la leçon de première sur les probabilités conditionnelles.

1 Définition - Rappels

Définition 1
Soit P une probabilité sur l'univers U. Soit A un événement possible : $P(A) \neq 0$. On définit une nouvelle probabilité P_A sur U en posant, pour tout événement B : $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

$P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ». On l'interprète ainsi : c'est la probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé.

Notons que ceci implique : $P(B \cap A) = P_A(B) \times P(A)$.

Exemple 1 : On lance un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir le 2 sachant qu'on obtient un nombre pair ?

Posons : $A =$ « on obtient un nombre pair » et $B =$ « on obtient le 2 ».

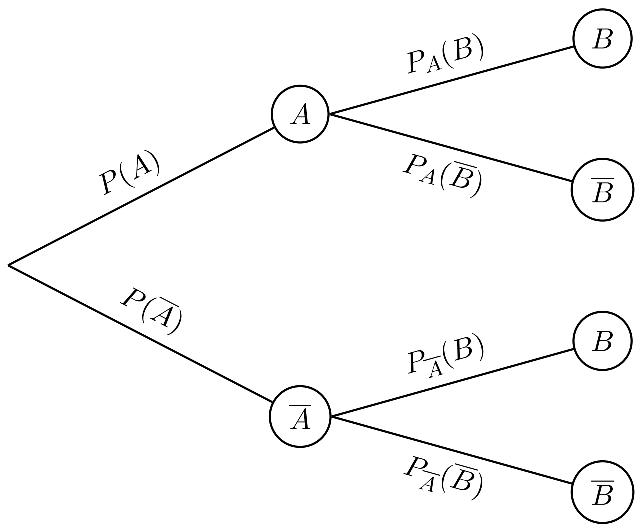
On calcule facilement : $P(A) = 3/6 = 1/2$; $P(A \cap B) = 1/6$ donc $P_A(B) = (1/6) \div (1/2) = 1/3$. C'est conforme à l'intuition puisqu'il y a 3 façons d'obtenir un nombre pair.

Exemple 2 : Dans les mêmes conditions, quelle est la probabilité d'obtenir le 3 sachant qu'on obtient un nombre pair ?

Posons : $C =$ « obtenir le 3 ». Alors $P(A \cap C) = 0$, donc $P_A(C) = 0$. C'est logique, puisque l'événement est impossible.

2 Arbre de probabilités

On représente les probabilités conditionnelles sur les branches du deuxième niveau, ainsi :



On trouve alors le probabilité d'une intersection de deux événement en multipliant les probabilités trouvées sur le parcours correspondant.

On trouve par exemple : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ en suivant les branches du haut.

3 Application du principe des probabilités totales

3.1 Partition de deux ensembles

Soient A et $\overline{A}$ deux événements contraires, et différents de l'événement impossible.

Autrement dit : toute éventualité de U appartient à un et un seul de ces deux ensembles.

Si A, $\overline{A}$ forment une partition de U alors pour tout événement E :

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap \overline{A})$$

Par conséquent :

$$P(E) = P_A(E) \times P(A) + P_{\overline{A}}(E) \times P(\overline{A})$$

3.2 Partition de trois ensembles

Soient A, B, C trois événements différents de $\varnothing$. A, B, C forment une partition de U s'ils sont incompatibles deux à deux et que leur réunion est U.

Autrement dit : toute éventualité de U appartient à un et un seul de ces trois ensembles.

Si A, B, C forment une partition de U alors pour tout événement E :

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C)$$

Par conséquent :

$$P(E) = P_A(E) \times P(A) + P_B(E) \times P(B) + P_C(E) \times P(C)$$

Les propriétés précédentes se généralisent à une partition formée d'un nombre quelconque d'ensembles.

4 Indépendance

Définition 2
Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Si A et B sont différents de $\varnothing$, cette définition est équivalente à :
- $P_A(B) = P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$

Intuitivement, cela signifie que le fait qu'un événement soit réalisé n'a aucune influence sur la probabilité de réalisation de l'autre.