

Variables aléatoires discrètes finies

1 Rappels de première

1.1 Définition

Définition 1

Une **variable aléatoire (discrète) finie** est une variable qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs x_1, x_2, \dots, x_n , chacune avec une certaine probabilité.

C'est l'équivalent d'un caractère quantitatif discret en statistiques. En particulier, on obtient une variable aléatoire en considérant les issues d'une expérience aléatoire dont les résultats sont numériques et en nombre fini.

On désigne habituellement une variable aléatoire avec une majuscule : X, Y , etc. La probabilité que X prenne la valeur x_i se note $P(X = x_i)$ (ou parfois $P(x_i)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.)

Définition 2

La **loi de probabilité** d'une v.a. X est l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe la probabilité $P(X = x_i)$. On la représente habituellement à l'aide d'un tableau.

Valeur prise	x_1	x_2	...
Probabilité de cette valeur	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$...

1.2 Espérance d'une variable aléatoire

C'est l'équivalent de la moyenne en statistiques, les fréquences étant remplacées par les probabilités.

Définition 3

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n . **L'espérance** de X , notée $E(X)$ est le nombre :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n \times P(X = x_n)$$

Autrement dit, on multiplie chaque valeur par sa probabilité et on fait la somme.

Pour alléger les notations, posons : $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, etc. On obtient :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n$$

1.3 Modèle de la succession d'épreuves indépendantes

On peut constituer une expérience aléatoire par la succession de plusieurs expériences aléatoires.

Si le résultat de l'une quelconque de ces expériences ne dépend pas du résultat des autres expériences, on dit qu'elles sont indépendantes les unes des autres et on parle alors de répétitions d'expériences **indépendantes**.

Propriété 1 (admise)

Dans le cas de la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste (ordonnée) d'issues est le **produit** des probabilités de chaque issue :

$$P(a_1; a_2; \dots; a_n) = P(a_1) \times P(a_2) \times \dots \times P(a_n)$$

On peut représenter une succession d'expériences aléatoire par un arbre, et la probabilité d'une liste est le produit des probabilités rencontrées sur le parcours.

2 Schéma de Bernoulli

Définition 4

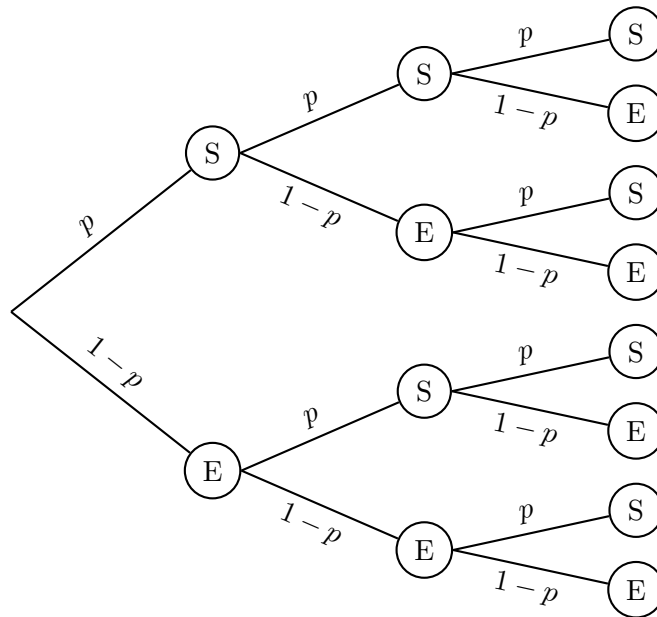
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues. On note traditionnellement ces deux issues S (succès) et E (échec).

On note $p = P(S)$ la probabilité d'un succès.

Un **schéma de Bernoulli** est une expérience qui est la répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli *identiques* et *indépendantes*.

On note n le nombre d'épreuves répétées.

Illustration avec $n = 3$:



Exemples :

1. On lance 20 fois de suite la même pièce.
2. On tire 10 fois de suite une boule dans une urne contenant des boules de deux couleurs et on la remet à chaque fois dans l'urne (tirage avec remise).

Remarque : on peut schématiser une issue par une liste ordonnée de n lettres « S » ou « E ».

Définition 5

On considère une épreuve de Bernoulli, avec $p = P(S)$. La variable X qui vaut 1 pour un succès et 0 pour un échec suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

3 Loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli (répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes), et on considère la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les résultats de ces expériences. La raison pour laquelle on s'intéresse à ce type d'expérience est qu'il décrit la constitution d'un **échantillon** d'individus dans une population, et permet donc de faire un lien entre probabilités et statistiques.

3.1 Définition

Définition 6

On réalise un schéma de Bernoulli en répétant n fois une épreuve de Bernoulli (une expérience à deux issues) de paramètre p . Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus. Les valeurs prises par X sont donc tous les entiers de 0 à n . On appelle **loi binomiale** de paramètres n et p , et on note $\mathcal{B}(n; p)$ la loi de probabilité de X .

Elle associe à tout entier $k \in \{0 ; 1 ; \dots ; n\}$ la probabilité d'obtenir k succès. Cette probabilité dépend du nombre n de répétitions et de la probabilité p d'un succès.

Exemple : on jette une pièce trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois pile ?

Il y a trois manières d'obtenir 2 piles : PPF, PFP et FPP. La probabilité de chacun de ces événements est : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ puisque les épreuves sont indépendantes. La probabilité d'obtenir 2 piles est donc de $\frac{3}{8}$.

La variable aléatoire X , qui compte le nombre de piles, suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$.

Le calcul précédent montre que $P(X = 2) = \frac{3}{8}$.

3.2 Les coefficients binomiaux

On construit l'arbre pondéré associé à un schéma de Bernoulli de paramètre n et p (rappel : n est le nombre de répétitions et p la probabilité d'un succès au cours d'une épreuve de Bernoulli.) Le nombre de chemins correspondant à k succès s'appelle « coefficient binomial k parmi n » ou plus simplement « k parmi n » et se note $\binom{n}{k}$.

Remarque : De façon équivalente, on peut dire que parmi les mots de n lettres qu'on peut fabriquer en utilisant seulement les lettres « S » et « E », $\binom{n}{k}$ est le nombre de mots comportant exactement k fois la lettre « S ».

3.3 Propriétés des coefficients binomiaux

Propriété 2

Soit n, k deux entiers naturels avec $k \leq n$.

$$1. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$2. \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$3. \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$4. \text{ Pour } 1 \leq k \leq n-1, \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

L'égalité 4 s'appelle la formule de Pascal. On l'obtient en raisonnant de la façon suivante.

Dans l'arbre de probabilités, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parcours comportant k succès. Parmi ces parcours, on forme deux groupes :

- Ceux qui se terminent par un succès. On considère les $n-1$ premières branches, il y a parmi elles $k-1$ succès (puisque'il y en a k en tout). Le nombre de ces parcours est donc $\binom{n-1}{k-1}$.
- Ceux qui se terminent par un échec. On considère les $n-1$ premières branches, il y a parmi elles k succès. Le nombre de ces parcours est donc $\binom{n-1}{k}$.

3.4 Triangle de Pascal

Pour $n \leq 10$, la formule de Pascal permet de calculer les $\binom{n}{k}$ de proche en proche. On présente le calcul à l'aide du tableau ci-dessous :

- on place des 1 sur la première colonne et la diagonale ;
- on obtient un autre nombre du tableau en ajoutant le nombre juste au-dessus et celui situé à gauche sur la ligne précédente.

Et ainsi de suite...

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

3.5 Formule générale de la loi binomiale

Soit X une v.a. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètres n et p .

Propriété 3

Pour tout entier $k \in [0; n]$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration :

Chaque liste formée de k succès, et donc de $n - k$ échecs, a pour probabilité : $p^k (1-p)^{n-k}$.

Le nombre de telles listes est égal au nombre de parcours sur l'arbre comportant k succès parmi les n résultats. Il y a $\binom{n}{k}$ parcours de ce type. Donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. ■

3.6 Espérance

Soit X une v.a. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètres n et p .

On admet la propriété suivante :

Propriété 4

L'espérance de X est : $E(X) = np$.

3.7 Exemple

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 8$ et $p = 0,4$. Calculer $p(X = 5)$.

D'après le triangle de Pascal : $\binom{8}{5} = 56$. Donc : $P(X = 5) = 56 \times 0,4^5 \times 0,6^3 \simeq 0,1239$