Suites

1 Définition

Définition 1
Une suite numérique est une liste ordonnée de nombres réels, numérotés par des *indices* qui sont des nombres entiers naturels consécutifs 0, 1, 2, ...
Si la suite est désignée par la lettre u, à chaque nombre entier naturel n est associé un nombre réel, noté $u(n)$ ou u_n appelé terme de *rang* n, de la suite.
Le premier terme de la suite est en général u_0 ou u_1.

La notation u_n se lit « u indice n ».

La notation (u_n), entre parenthèses, signifie la suite entière (tous les termes).

Remarque importante : u_{n+1} est le successeur de u_n (le nombre qui suit dans la liste).

Propriété 1 (représentation graphique)
Comme pour une fonction, on peut représenter graphiquement une suite numérique (u_n) par un « nuage de points » de coordonnées $(n\,;u_n)$, c'est une représentation graphique « discrète », c'est à dire « non continue ».

2 Mode de génération

1. **Formule explicite** : On calcule u_n directement à partir de n.
   Exemple : $u_n = n^2 + 3n + 1$
2. **Formule de récurrence** : À partir d'un terme u_n quelconque, on calcule le terme suivant, u_{n+1}. Il faut donner un premier terme pour commencer le calcul, c'est en général u_0.
   Dans ce cas, l'algorithme permettant de calculer u_n comporte en général une boucle "pour".
   Exemple : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

Remarque : Il y a aussi des suites qui ne se définissent ni par une formule explicite ni par une relation de récurrence.

Par exemple, la suite des nombres premiers ou des décimales de π.

3 Sens de variation

Définition 2
On dit que :

- Une suite (u_n) est croissante si chaque terme est plus grand que son prédécesseur : $u_{n+1} \geqslant u_n$
- Une suite (u_n) est décroissante si chaque terme est plus petit que son prédécesseur : $u_{n+1} \leqslant u_n$
- Une suite (u_n) est constante si tous les termes sont égaux : $u_{n+1} = u_n$

4 La notation Σ

Le symbole $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k$ signifie « somme des termes u_k, l'indice k variant de a à b ».

Par exemple : $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} u_k$ signifie : $u_2 + u_3 + u_4 + u_5$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} k^2$ signifie : $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$.

5 Suites arithmétiques

Définition 3
Une suite est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le **même** nombre, appelé raison (et noté en général r). On parle alors de **croissance linéaire**.

Autrement dit, (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Critère pratique : (u_n) est arithmétique si $u_{n+1} - u_n$ est une constante.

Propriété 2
Soit (u_n) une suite arithmétique.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- (u_n) est croissante si $r \geq 0$ et décroissante si $r \leq 0$.
- Les points représentant (u_n) sont alignés.
- Un terme est toujours la moyenne arithmétique du précédent et du suivant : $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$

Propriété 3 (Somme de termes consécutifs)
Soit (u_n) une suite arithmétique. La somme $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$ de plusieurs termes consécutifs s'obtient par la formule :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

6 Suites géométriques à termes positifs

Définition 4
Une suite est géométrique si on passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le **même** nombre, appelé raison (et noté en général q). On parle alors de **croissance exponentielle**.

Autrement dit, (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Dans le cours de terminale, on ne considère que les suites géométriques à termes positifs, ce qui implique que q et u_0 sont positifs.

Critère pratique : (u_n) est géométrique si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante.

Propriété 4
Soit (u_n) une suite géométrique.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- (u_n) est croissante si $q \geq 1$ et décroissante si $q \leq 1$.
- Les points représentant (u_n) sont sur une courbe exponentielle.
- Un terme est toujours la moyenne géométrique du précédent et du suivant : $u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$

Propriété 5 (Somme de termes consécutifs)
Soit (u_n) une suite géométrique de raison différente de 1. La somme $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$ de plusieurs termes consécutifs s'obtient par la formule :

$$S = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$