Convexité

1 Dérivée seconde

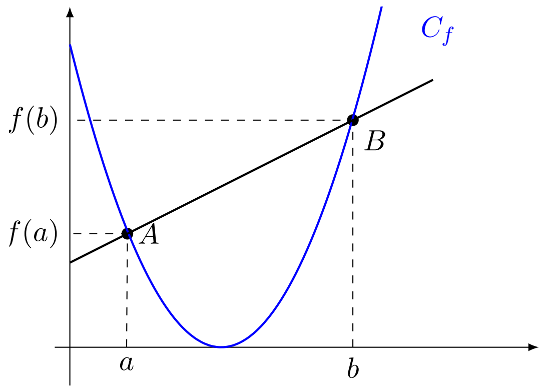
Définition 1
Soit f une fonction et f' sa dérivée. Si le nombre dérivé de f' en a existe, on dit que f est deux fois dérivable en a.
On note $f''(a)$ le nombre dérivé de f' en a, et la fonction qui à x fait correspondre $f''(x)$ s'appelle la **dérivée seconde** de f. C'est la dérivée de la dérivée.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.

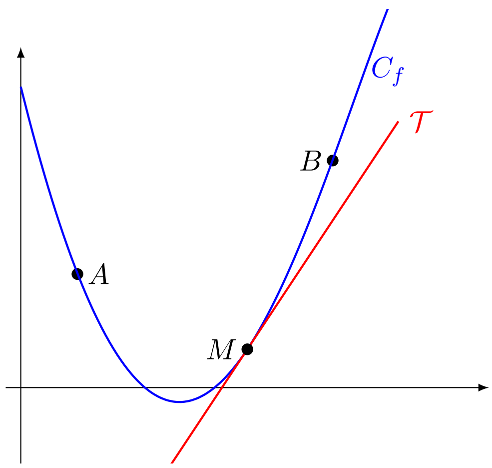
2 Fonctions convexes

Définition 2
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a et b, deux nombres appartenant à I. Soient $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ les points correspondants sur la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f.
On dit que f est **convexe** sur I si quels que soient a et b dans I, la partie de la courbe $\mathcal{C}_f$ placée entre A et B est **au-dessous** de la sécante (AB).

Il faut comprendre au sens large : au-dessous ou sur la sécante (AB).



Propriété 1
Une fonction dérivable f est convexe sur I si et seulement la courbe $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de ses tangentes.



$\mathcal{C}f$ est au-dessus de la tangente $\mathcal{T}$ au point M.

Propriété 2
Soit f une fonction dérivable sur I ; f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I.

Si f' est dérivable, on sait qu'elle est croissante si et seulement si sa dérivée est positive. Autrement dit :

Propriété 3
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I ; f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I.

Exemples : La fonction carré, la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$. En effet, leur dérivée seconde est positive.

La fonction inverse, la fonction cube sont convexes sur $\mathbb{R}^{+*}$.

La notion symétrique de « convexe » est « concave ».

Définition 3
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a et b, deux nombres appartenant à I. Soient $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ les points correspondants sur la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f.
On dit que f est **concave** sur I si quels que soient a et b dans I, la partie de la courbe $\mathcal{C}_f$ placée entre A et B est **au-dessus** de la sécante (AB).

Remarque : L'opposée d'une fonction convexe est concave. On peut donc adapter les propriétés précédentes. En particulier :

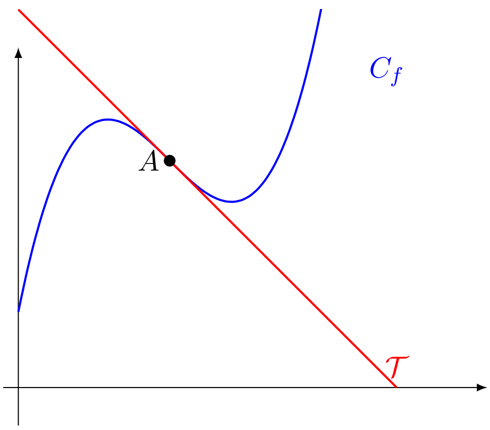
Propriété 4 (admise)
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I ; f est concave si et seulement si f'' est négative sur I.

Exemple : La fonction racine carrée est concave. La fonction inverse est concave sur $\mathbb{R}^{-*}$.

3 Point d'inflexion

Définition 4
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A si la fonction change de convexité en ce point : de concave elle devient convexe ou inversement.

Remarque : En ce point, la tangente traverse la courbe



Des propriétés précédentes, on déduit le résultat suivant :

Propriété 5
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I ; si f'' s'annule en changeant de signe en $x = a$, alors f admet un point d'inflexion $A(a\,;f(a))$.

Bien sûr, la courbe d'une fonction peut avoir un nombre arbitraire de points d'inflexion (voire une infinité).