Continuité, dérivabilité, limites, représentation graphique

1 Limite d'une fonction : Définitions

La définition de la limite d'une fonction en $+\infty$ ressemble beaucoup à celle de la limite d'une suite.

Soit f une fonction numérique ; A, B, ℓ, r, a des nombres réels, avec $r > 0$.

Définition 1
La limite en $+\infty$ de la fonction f est $+\infty$ si $f(x) \in [A\,;+\infty[$ pour tout x assez grand.
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La limite en $+\infty$ de la fonction f est $-\infty$ si $f(x) \in]-\infty\,;B]$ pour tout x assez grand.
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

La limite en $+\infty$ de la fonction f est ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient $f(x)$ pour tout x assez grand.
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

On pose les mêmes définitions lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers un nombre fini a. Cependant, il faut en général distinguer deux cas, selon que x tend vers a en restant inférieur à a ou en restant supérieur à a. Récapitulons :

L'expression :	Signifie :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout x assez grand.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout x assez grand.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$	Quel que soit $r > 0$ (même très proche de 0), $f(x) \in]\ell - r\,;\ell + r[$ pour tout x assez grand.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout x assez négatif.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout x assez négatif.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$	Quel que soit $r > 0$ (même très proche de 0), $f(x) \in]\ell - r\,;\ell + r[$ pour tout x assez négatif.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout $x < a$ et assez proche de a.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = -\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout $x < a$ et assez proche de a.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \ell$	Quel que soit $r > 0$ (même très proche de 0), $f(x) \in]\ell - r\,;\ell + r[$ pour tout $x < a$ et assez proche de a.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty$	Quel que soit A (même très grand), $f(x) \geq A$ pour tout $x > a$ et assez proche de a.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$	Quel que soit B (même très négatif), $f(x) \leq B$ pour tout $x > a$ et assez proche de a.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \ell$	Quel que soit $r > 0$ (même très proche de 0), $f(x) \in]\ell - r\,;\ell + r[$ pour tout $x > a$ et assez proche de a.

Notation et vocabulaire :

On note aussi $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ pour $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ et on parle de limite à gauche (ou : par valeurs inférieures) en a.

On note aussi $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ pour $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$, et on parle de limite à droite (ou : par valeurs supérieures) en a.

Remarque :

Lorsqu'on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, il est entendu que les limites $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ sont égales.

2 Limites de référence

Propriété 1
Limites en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} x^2 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = ... = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = ... = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Limites en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} x = \lim_{x\to-\infty} x^3 = ... = -\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^4 = ... = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = ... = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Limites en 0^- :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x^2 = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x^3 = ... = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^3} = ... = -\infty \qquad ; \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^2} = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^4} = ... = +\infty$$

Limites en 0^+ :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2 = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^3 = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x} = ... = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^2} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^3} = ... = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$$

Remarque :

Plutôt que les apprendre par cœur, il faut savoir retrouver ces limites à l'aide de deux ingrédients : la règle des signes et l'idée empirique suivante : l'inverse d'un nombre voisin de 0 est voisin de l'infini, et réciproquement.

Propriété 2
Soit n un entier naturel.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty \ ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0 \ ; \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

L'idée intuitive est celle-ci : si on a une forme indéterminée, e^x l'emporte sur x et x l'emporte sur $\ln(x)$. **Attention** de bien noter : *si on a une forme indéterminée.*

Par exemple, $\lim_{x\to-\infty} x + \mathrm{e}^x = -\infty$. Il n'y a pas de forme indéterminée, la règle intuitive ne s'applique pas.

Propriété 3
La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Attention ! Cette règle ne s'applique que lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

3 Opérations et limites

Règle empirique : on effectue la même opération sur les limites que celle effectuée sur les fonctions, sous réserve que cette opération ait un sens.

Propriété 4
Soient ℓ et m deux nombres ; soient f et g deux fonctions. Dans chacun des tableaux suivants, λ représente $+\infty$, $-\infty$, a^- ou a^+.
Somme :

Si $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et : $\lim\limits_{x\to\lambda} g(x) =$	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors : $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) + g(x) =$	$\ell + m$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Produit :

Si $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
et : $\lim\limits_{x\to\lambda} g(x) =$	m	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors : $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) \times g(x) =$	$\ell \times m$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	forme indéterminée

Le signe est donné par la règle des signes.

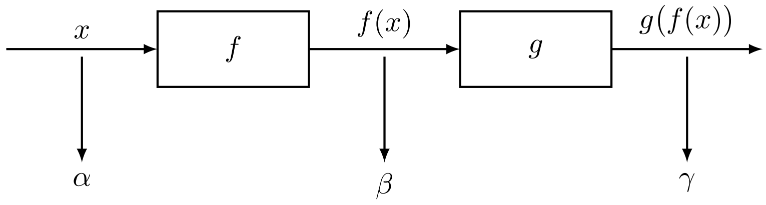
Inverse :

Si $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) =$	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0^-	0^+	0
alors : $\lim\limits_{x\to\lambda} \dfrac{1}{f(x)} =$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée

4 Limite d'une fonction composée

Soient f et g, deux fonctions. Les symboles α, β et γ représentent $+\infty$, $-\infty$, a^- ou a^+.

Propriété 5
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g\big(f(x)\big) = \gamma$.

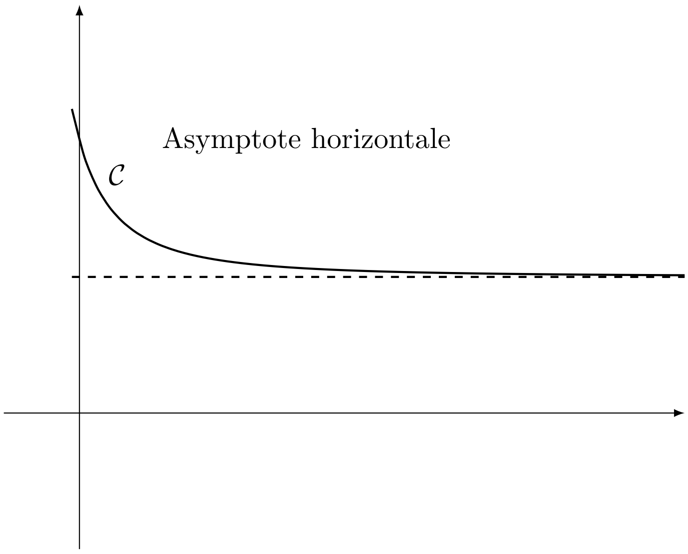


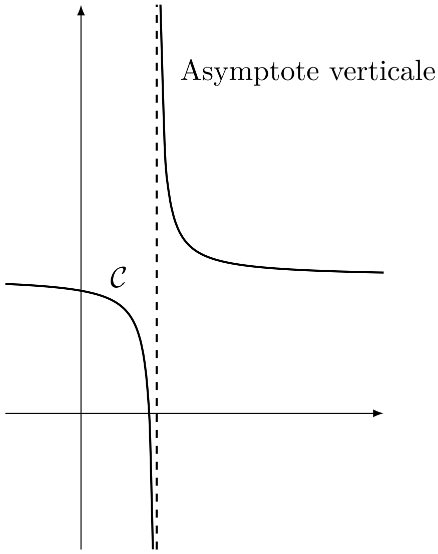
5 Asymptotes

Soit f une fonction, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et a, b un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est **asymptote** (horizontale) à $\mathcal{C}$.

Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est **asymptote** (verticale) à $\mathcal{C}$.





6 Continuité : Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I.

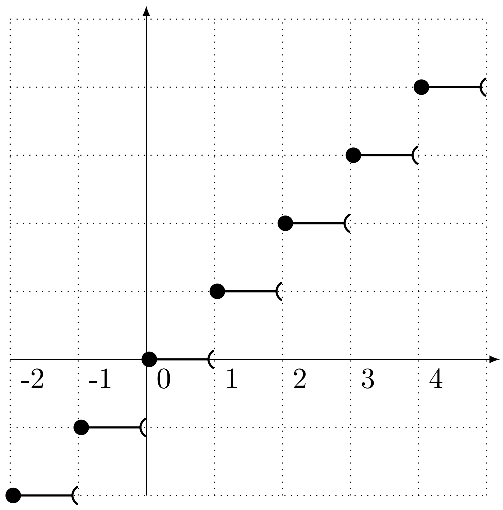
Définition 2
On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Rappel : Supposons que a n'est pas une borne de I. Lorsqu'on écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, cela signifie implicitement que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$. Donc la limite est $f(a)$ « des deux côtés ».

Définition 3
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout réel a appartenant à I.

Exemples : La fonction « carré » est continue.

La fonction « partie entière », représentée ci-dessous, est discontinue en tout $n \in \mathbb{Z}$.



7 Continuité des fonctions usuelles

1. Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.
2. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
3. Les fonctions rationnelles sont continues sur les intervalles où leur dénominateur ne s'annule pas.

4. Les fonctions somme, produit, composée de fonctions continues sont continues.
5. En pratique, toutes les fonctions usuelles sont continues par intervalles...

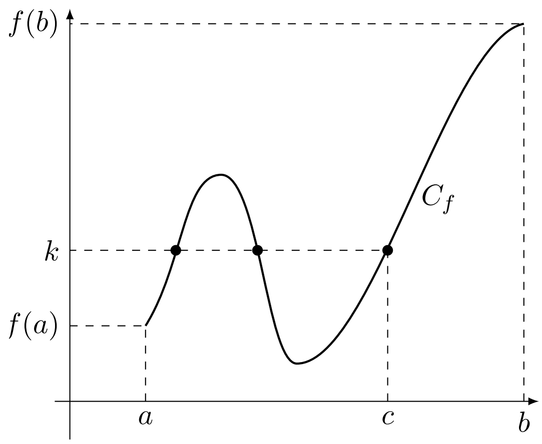
Attention cependant : une fonction dérivable en a est continue en a mais la réciproque est fausse.

Contre-exemples classiques : la fonction valeur absolue est continue en 0, mais pas dérivable en 0. Idem pour la fonction racine carrée.

8 Propriétés des fonctions continues

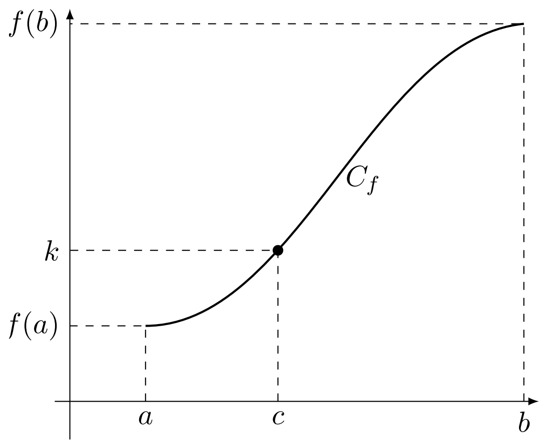
Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit f une fonction **continue** sur l'intervalle $[a\,;b]$. Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a une solution (au moins) dans $[a; b]$.



Théorème 2 (Théorème de la bijection)
Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle $[a\,;b]$. Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans $[a; b]$.



Remarque : Si l'intervalle considéré est ouvert, on remplace $f(a)$ et $f(b)$ par des limites. Le théorème des valeurs intermédiaires devient :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a; b[$. Pour tout k compris **strictement** entre $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$, il existe un réel c compris (strictement) entre a et b tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a une solution (au moins) dans $]a; b[$, et cette solution est unique si f est strictement monotone.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 3
Si une fonction est continue et *strictement* monotone sur un intervalle, alors elle admet une fonction réciproque.

Exemples : La restriction de la fonction « carré » est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc elle admet une fonction réciproque : c'est la fonction « racine carrée ».

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une fonction réciproque : la fonction logarithme népérien.

9 Dérivée : compléments

- On rappelle la propriété de première : si $f(x) = g(ax+b)$, alors $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.
- Si $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, alors $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
- Si $f(x) = [u(x)]^2$, alors $f'(x) = 2u'(x)[u(x)]$.
- Si $f(x) = \ln[u(x)]$, alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.