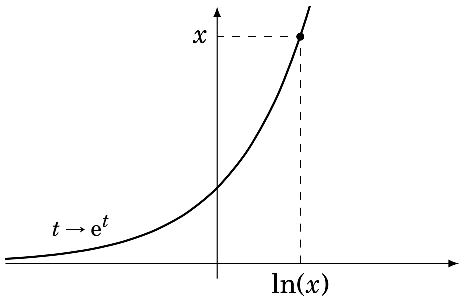
# La fonction logarithme népérien

## 1 Définition

Rappel : la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'autre part, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. On peut en déduire que tout réel $x > 0$ a un unique antécédent par la fonction exponentielle.

On note cet antécédent : $\ln(x)$, qui se lit « logarithme népérien de $x$ » (du nom de Napier (1550-1617), mathématicien écossais).




**Définition 1**
Pour tout $x > 0$, $\ln(x)$ est l'unique réel tel que $e^{\ln(x)} = x$.

On obtient ainsi une fonction définie sur $]0;+\infty[$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ : la fonction logarithme népérien.

**Remarque** : on démontre facilement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$. Autrement dit, peu importe l'ordre dans lequel on applique les deux fonctions exponentielle et logarithme népérien.

Attention toutefois : $\ln(e^x) = x$ pour tout $x$ réel, tandis que $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x$ réel strictement positif (car si $x < 0$, $\ln(x)$ n'existe pas).

En prenant $x = 0$ et $x = 1$, on en déduit en particulier : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

## 2 Propriétés

Rappel : on sait que pour tous réels $x$ et $y$, $e^{x+y} = e^x \times e^y$ (propriété des fonctions exponentielles).

On en déduit :

**Propriété 1**
Quels que soient $a$, $b \in ]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$ :

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. $\ln(a^n) = n\ln(a)$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

**Propriété 2**
La fonction logarithme népérien est strictement croissante.

**Propriété 3**
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

**Propriété 4**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

# 3 Tableau et courbe

| $x$ | $0$ | | $1$ | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln'(x)$ | ‖ | | $+$ | | |
| $\ln(x)$ | ‖ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |